Available online at http://www.journalijdr.com

IJDR

International Journal of
DEVELOPMENT RESEARCH

ISSN: 2230-9926

International Journal of Development Research
Vol. 06, Issue, 11, pp.10295-10300, November, 2016

Full Length Research Article

POINTS ALGÉBRIQUES DE DEGRÉ DONNÉ SUR LA COURBE D'ÉQUATION AFFINE $y^2 = x^5 + 1$

[1]Oumar SALL, [2]Moussa FALL and [3]Chérif Mamina COLY

[1,2,3]Laboratoire de Mathématiques et Applications (L.M.A.)

ARTICLE INFO

Article History:
Received 18th August, 2016
Received in revised form
27th September, 2016
Accepted 11th October, 2016
Published online 30th November, 2016

Key Words:

Degree of algebraic points,
Jacobian, Smooth plane curve,
Linear system.

ABSTRACT

We determine explicitly algebraic points of a given degree over on the curve of affine equation$y^2 = x^5 + 1$. This note completes previous work of E.F. Schaefer [Sch] who gave a description of points of degree at most two over on the even curve.

INTRODUCTION

Etant donnée une courbe algébrique $\mathcal{C}$définie sur uncorps de nombres K on note $\mathcal{C}(K)$l'ensemble despoints de $\mathcal{C}$ rationnels sur Ket par $\bigcup_{[K:\,]\leq d} \mathcal{C}(K)$l'ensemble des points de $\mathcal{C}$ définis sur K de degré $\leq d$. Le degré d'un point algébrique est le degré de son corps de définition sur .

Dans cette note, notre travail va consister en l'étude de quelques cas particuliers, où l'on peut déterminer explicitement les points algébriques de degré quelconque sur la courbe d'équation affine$y^2 = x^5 + 1$

Il semble qu'une condition indispensable est le fait que le groupe de Mordell-Weil J( ) soit fini. Une description de J( ) est donnée dans [Sch].

Notons$P_0 = (\ 1,\ 0\ )$, $P_1 = (0,1)$,$\overline{P_1} = (0,\ \ 1)$,$\infty$ le point à l'infini, $Q_1 = (1 + i,\ 1\ \ \ 2i)$, $Q_2 = (1\ \ \ i,\ 1 + 2i)$, $Q_3 = (1 + i,\ \ 1 + 2i)$ et$Q_4 = (1\ \ \ i,\ \ 1\ \ \ 2i)$

Dans [Sch], Schaefer a donné une description des points rationnels et des points quadratiques sur sur la courbe étudiée. Cette description s'énonce comme suit

Proposition.*(cf [Sch]). The rational points in are given by*$\mathcal{C}(\ ) = \{\infty, (\ 1,\ 0\ ), (0, \pm 1)\}$. *The only other points of*$\mathcal{C}$*, with coordinates in a quadratic extension of , are*$\big(1 + i,\ \pm(1\ \ \ 2i)\big)$, $Q_2 = \big(1\ \ \ i,\ \pm(1 + 2i)\big)$*and those with* $x \in$.

Nous étendons ce résultat, en donnant une description explicite des points algébriques de degré quelconque sur sur la courbe$\mathcal{C}$. Notre résultat principal s'énonce comme suit:

Corresponding author: Oumar SALL
Laboratoire de Mathématiques et Applications (L.M.A.)

Théorème. *On a* $\bigcup_{[K:\ ]\leq d} C(K) = F_0 \cup F_5 \cup F_6 \cup F_7 \cup F_8 \cup F_9$ *avec*

$$F_0 = \left\{ \left(x, \ \frac{\sum_{i\leq \frac{l}{2}} a_i x^i}{\sum_{i\leq \frac{l-5}{2}} b_j x^j} \right) \middle| \ a_i, b_j \in \quad \text{et } x \text{ racine de l'équation } (\varepsilon_0) \right\}$$

$$F_9 = \left(x, \ \frac{\sum_{i\leq \frac{l+2}{2}} a_i x^i}{\sum_{i\leq \frac{l-3}{2}} b_j x^j} \right) \middle| \begin{array}{l} a_i, b_j \in \quad \text{verifiant } \sum_{i\leq \frac{l+2}{2}} (\ \ 1)^i a_i = 0, a_0 + b_0 = 0 \\ \\ \text{et } x \text{ racine de l'équation } (\varepsilon_2) \end{array}$$

$$F_8 = \left\{ \left(x, \ \frac{\sum_{i\leq \frac{l+2}{2}} a_i x^i}{\sum_{i\leq \frac{l-3}{2}} b_j x^j} \right) \middle| \begin{array}{l} a_i, b_j \in \ \ , \ a_0 + b_0 = 0 \, , \quad a_1 + b_1 = 0 \\ \text{et } x \text{ racine de l'équation } (\varepsilon_2) \end{array} \right\}$$

$$F_7 = \left(x, \ \frac{\sum_{i\leq \frac{l+4}{2}} a_i x^i}{\sum_{i\leq \frac{l-1}{2}} b_j x^j} \right) \middle| \begin{array}{l} a_i, b_j \in \quad \text{verifiant } \sum_{i\leq \frac{l+4}{2}} (\ \ 1)^i a_i = 0, \ a_0 + b_0 = 0 \\ \\ a_1 + b_1 = 0 \, , \ a_2 + b_2 = 0 \text{ et } x \text{ racine de l'équation } (\varepsilon_4) \end{array}$$

$$F_6 = \left\{ \left(x, \ \frac{\sum_{i\leq \frac{l+1}{2}} a_i x^i}{\sum_{i\leq \frac{l-4}{2}} b_j x^j} \right) \middle| \begin{array}{l} a_i, b_j \in \ \ , \ a_0 \quad b_0 = 0 \\ \text{et } x \text{ racine de l'équation } (\varepsilon_1) \end{array} \right\}$$

$$F_5 = \left(x, \ \frac{\sum_{i\leq \frac{l+1}{2}} a_i x^i}{\sum_{i\leq \frac{l-4}{2}} b_j x^j} \right) \middle| \begin{array}{l} a_i, b_j \in \quad \text{verifiant } \sum_{i\leq \frac{l+1}{2}} (\ \ 1)^i a_i = 0 \\ \\ \text{et } x \text{ racine de l'équation } (\varepsilon_1) \end{array}$$

On désigne par (ε_k) *l'équation* $\left(\sum_{i\leq \frac{l+k}{2}} a_i x^i \right)^2 = \left(\sum_{j\leq \frac{l-5+k}{2}} b_j x^j \right)^2 (x^5 + 1).$

RÉSULTATS AUXILIAIRES

Pour un diviseur D sur$\mathcal{C}$, nous notons (D)le -espace vectoriel des fonctions rationnelles F sur $\mathcal{C}$ telles que $F = 0$ ou $div(F) \geq D$; $l(D)$ désignela -dimension de (D).

Soient x, y les fonctions rationnelles sur C donnéespar$x(X,Y,Z) = \frac{X}{Z}$ et$x(X,Y,Z) = \frac{X}{Z}$.

L'équation projective de$\mathcal{C}$dans le plan projectif est. : $Y^2Z^3 = Y^5 + Z^5$.

Soit $\eta = exp\left(\frac{2i\pi}{5}\right)$ dans , possons$A_k = (\eta^{2k+1}, \ 0\ )$ avec$k \in \{1,2,3,4\}$.

Nous désignerons par $\mathcal{N}.\mathcal{C}$ le cycle d'intersection d'une courbe algébrique $\mathcal{N}$définie sur et la courbe$\mathcal{C}$.

Lemme 1

1) $divx = P_1 + \overline{P_1}$ 2∞, $div(x+1) = 2P_0$ 2∞, $div(y \quad 1) = 5P_1$ 5∞, $div(y+1) = 5\overline{P_1}$ 5∞, $div(y) = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$ 5∞.
(on remarque$A_2 = P_0$ *)*

2) $(\infty) = \ 1$
$(2\infty) = L(3\infty) = \ 1, x$
$(4\infty) = \ 1, x, x^2$
$(5\infty) = \ 1, x, x^2, y$
$(6\infty) = \ 1, x, x^2, y, x^3$

$(7\infty) = 1, x, x^2, y, x^3, xy$

Plus généralement pour $m \geq 3$, *une base de* $(m\infty)$ *est donnée par:*

$$B_m = \left\{x^i \,\middle|\, i \in \quad, i \leq \frac{m}{2}\right\} \cup \left\{x^j y \,\middle|\, i \in \quad, j \leq \frac{m \quad 5}{2}\right\}.$$

Preuve.

1) Il s'agit d'un calcul sans difficulté du type $div(x \quad a) = (X \quad aZ = 0).\mathcal{C} \quad (Z = 0).\mathcal{C}$.

2) Il est clair que B_m est libre. Il reste à montrer que le cardinal de B_m estégal à $dim \ (m\infty)$

Pour $m \leq 2g \quad 2 = 2$, la réponse résulte de **1).** Si $m \geq 2g \quad 1$, d'après lethéorème de Riemann-Roch, on a dim $(m\infty) = m \quad g + 1$

Considérons les cas suivants:

1e cas : supposons que m est pair, et posons $m = 2$. Ainsi, on a : $i \leq \frac{2h}{2}$ et $j \leq \frac{m-5}{2}$ ainsi $j \leq \frac{2h-5}{2} \Leftrightarrow j \leq \frac{2h-6}{2} = \quad 3 = g \quad 1$. Donc on obtient

$B_m = \{1, x, \dots, x^h\} \cup \{y, yx, \dots, yx^{h-g-1}\}$, d'où $card B_m = m \quad g + 1 = dim \ (m\infty)$.

2e cas : supposons que m est impair, et posons $m = 2 \quad + 1$. Ainsi, on a $i \leq \frac{2h+1}{2} \Leftrightarrow i \leq \frac{2h}{2}$ ainsi et $j \leq \frac{m-5}{2} \Leftrightarrow j \leq \frac{2h+1-5}{2} \Leftrightarrow j \leq \frac{2h-4}{2} = \quad 2 = \quad g$. Donc on obtient

$B_m = \{1, x, \dots, x^h\} \cup \{y, yx, \dots, yx^{h-g}\}$, d'où $card B_m = m \quad g + 1 = \dim \ (m\infty)$

Lemme 2.(cf [Sch]).*Posons* $H = [P_0 + P_1 \quad 2\infty]$. *On a les relationssuivantes:*

$2H = [2P_1 \quad 2\infty]$
$3H = [Q_1 + Q_2 \quad 2\infty] = [P_0 + 3P_1 \quad 4\infty]$
$4H = [\overline{P_1}^2]$
$5H = [P_0 \quad \infty]$
$6H = [P_1 \quad \infty]$
$7H = [Q_3 + Q_4 \quad 2\infty]$
$8H = [2\overline{P_1} \quad 2\infty]$
$10H = 0$.

Lemme 3.(cf [Sch]).$J(\ ) \quad \overline{\quad 10} \quad \{mH, 0 \leq m \leq 9\}$.

On remarque que pour tout m tel que :$0 \leq m \leq 9$, on a : $mH = (10 \quad m)H$.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME

Soit $R \in \mathcal{C}(\bar{\ })$, avec $[\ (R) : \quad] = l$. Les travaux de Schaefer dans [Sch] nous permettent de supposer $l \geq 3$. Notons R_1, $R_2, \dots, R_l$ les conjugués de Galois de R. On a alors :

$[R_1 + R_2 + \dots + R_l \quad l\infty] \in J(\ )$

d'où, d'après le lemme 3,

$[R_1 + R_2 + \dots + R_l \quad l\infty] = mH = (m \quad 10)H \ , \quad 0 \leq m \leq 9 \ (\ )$

On voit que mH et $(m \quad 10)H$ engendrent le même sous-groupe; donc on peut se limiter aux cas suivant :

$Cas m = 0$

Le théorème d'Abel Jacobi permet de déduire de( )l'existenced'une fonction F telle que $divF = R_1 + R_2 + \dots + R_l \quad l\infty$ donc $F \in \ (l\infty)$ et d'après le lemme 1, on a

$$F(x, y) = \left(\sum_{i \leq \frac{l}{2}} a_i x^i\right) + y\left(\sum_{j \leq \frac{l-5}{2}} b_j x^j\right)$$

Aux points R_i on doit avoir

$$\left(\sum_{i\leq\frac{l}{2}} a_i x^i\right) + y\left(\sum_{j\leq\frac{l-5}{2}} b_j x^j\right) = 0 \ \ d'où y = \frac{\left(\sum_{i\leq\frac{l}{2}} a_i x^i\right)}{\sum_{j\leq\frac{l-5}{2}} b_j x^j}$$

et par suite la relation $y^2 = x^5 + 1$ donne l'équation (ε_0)

$$\left(\sum_{i\leq\frac{l}{2}} a_i x^i\right)^2 = \left(\sum_{j\leq\frac{l-5}{2}} b_j x^j\right)^2 (x^5 + 1).$$

On trouve ainsi une famille de points

$$F_0 = \left\{\left(x, \ \frac{\sum_{i\leq\frac{l}{2}} a_i x^i}{\sum_{i\leq\frac{l-5}{2}} b_j x^j}\right) \middle| a_i, b_j \in \ etxracinedel'équation(\varepsilon_0)\right\}.$$

$Casm = 9$

La relation ( )s'écrit $[R_1 + R_2 + \ldots + R_l \quad l\infty] = 9H = H$. Il existe alors une fonction F telle que $divF = R_1 + R_2 + \ldots + R_l + P_0 + P_1 \quad (l+2)\infty$donc $F \in \left((l+2)\infty\right)$ et d'après le lemme1, on a

$$F(x,y) = \left(\sum_{i\leq\frac{l+2}{2}} a_i x^i\right) + y\left(\sum_{j\leq\frac{l-3}{2}} b_j x^j\right)$$

On a$F(P_0) = 0$ donne la relation $\sum_{i\leq\frac{l+2}{2}} (\ \ 1)^i a_i = 0$ et$F(P_1) = 0 \ donne a_0 + b_0 = 0$.

Aux points R_i on doit avoir

$$\left(\sum_{i\leq\frac{l+2}{2}} a_i x^i\right) + y\left(\sum_{j\leq\frac{l-3}{2}} b_j x^j\right) = 0 \ \ d'où y = \frac{\left(\sum_{i\leq\frac{l+2}{2}} a_i x^i\right)}{\sum_{j\leq\frac{l-3}{2}} b_j x^j}$$

et par suite la relation $y^2 = x^5 + 1$ donne l'équation (ε_2)

$$\left(\sum_{i\leq\frac{l+2}{2}} a_i x^i\right)^2 = \left(\sum_{j\leq\frac{l-3}{2}} b_j x^j\right)^2 (x^5 + 1)$$

On trouve ainsi une famille de points

$$F_9 = \left(x, \ \frac{\sum_{i\leq\frac{l+2}{2}} a_i x^i}{\sum_{i\leq\frac{l-3}{2}} b_j x^j}\right) \Bigg| a_i, b_j \in \ verifiant \sum_{i\leq\frac{l+2}{2}} (\ \ 1)^i a_i = 0, a_0 + b_0 = 0 \ \ etxracinedel'équation(\varepsilon_2)$$

$Casm = 8$

La relation ( )s'écrit $[R_1 + R_2 + \ldots + R_l \quad l\infty] = 8H = 2H$. Il existe alors une fonction F telle que $divF = R_1 + R_2 + \ldots + R_l + 2P_1 \quad (l+2)\infty$, donc $F \in \left((l+2)\infty\right)$ et d'après le lemme1, on a

$$F(x,y) = \left(\sum_{i\leq\frac{l+2}{2}} a_i x^i\right) + y\left(\sum_{j\leq\frac{l-3}{2}} b_j x^j\right)$$

Comme$ord_{P_1}(F) = 2$, on déduit de

$$F(x,y) = a_0 + yb_0 + a_1x + b_1xy + \left(\sum_{2\le i\le\frac{l+2}{2}} a_i x^i\right) + y\left(\sum_{2\le j\le\frac{l-3}{2}} b_j x^j\right)$$

les relations suivantes: $a_0 + b_0 = 0$ et$a_1 + b_1 = 0$. Aux points R_i on doit avoir

$$\left(\sum_{i\le\frac{l+2}{2}} a_i x^i\right) + y\left(\sum_{j\le\frac{l-3}{2}} b_j x^j\right) = 0 \ d'où y = \frac{\left(\sum_{i\le\frac{l+2}{2}} a_i x^i\right)}{\sum_{j\le\frac{l-3}{2}} b_j x^j}$$

et par suite la relation $y^2 = x^5 + 1$ donne l'équation (ε_2)

$$\left(\sum_{i\le\frac{l+2}{2}} a_i x^i\right)^2 = \left(\sum_{j\le\frac{l-3}{2}} b_j x^j\right)^2 (x^5+1)$$

On trouve ainsi une famille de points

$$F_8 = \left\{\left(x, \ \frac{\sum_{i\le\frac{l+2}{2}} a_i x^i}{\sum_{i\le\frac{l-3}{2}} b_j x^j}\right) \middle| \begin{array}{c} a_i, b_j \in \ , \ a_0 + b_0 = 0\,, a_1 + b_1 = 0 \\ etx racine de l'équation (\varepsilon_2) \end{array}\right\}.$$

$Casm = 7$

La relation ( )s'écrit $[R_1 + R_2 + \ldots + R_l \quad l\infty] = 7H = \quad 3H$. Il existe alors une fonction F telle que $divF = R_1 + R_2 + \ldots + R_l + P_0 + 3P_1 \quad (l+4)\infty$, donc $F \in \left((l+4)\infty\right)$ et d'après le lemme 1, on a

$$F(x,y) = \left(\sum_{i\le\frac{l+4}{2}} a_i x^i\right) + y\left(\sum_{j\le\frac{l-1}{2}} b_j x^j\right)$$

On a$F(P_0) = 0$ donne la relation $\sum_{i\le\frac{l+4}{2}} (\ \ 1)^i a_i = 0etord_{P_1}(F) = 3donne a_0 + b_0 = 0,$

$a_1 + b_1 = 0$ et$a_2 + b_2 = 0$.Aux points R_i on doit avoir

$$\left(\sum_{i\le\frac{l+4}{2}} a_i x^i\right) + y\left(\sum_{j\le\frac{l-1}{2}} b_j x^j\right) = 0 \ d'où y = \frac{\left(\sum_{i\le\frac{l+4}{2}} a_i x^i\right)}{\sum_{j\le\frac{l-1}{2}} b_j x^j}$$

et par suite la relation $y^2 = x^5 + 1$ donne l'équation (ε_4)

$$\left(\sum_{i\le\frac{l+4}{2}} a_i x^i\right)^2 = \left(\sum_{j\le\frac{l-1}{2}} b_j x^j\right)^2 (x^5+1)$$

On trouve ainsi une famille de points

$$F_7 = \left(x, \ \frac{\sum_{i\le\frac{l+4}{2}} a_i x^i}{\sum_{i\le\frac{l-1}{2}} b_j x^j}\right) \Bigg| \begin{array}{l} a_i, b_j \in \quad verifiant \sum_{i\le\frac{l+4}{2}} (\ \ 1)^i a_i = 0, \ a_0 + b_0 = 0 \\ a_1 + b_1 = 0\,,\ a_2 + b_2 = 0 \ et \ x \ racine \ de \ l'équation \ (\varepsilon_4) \end{array}$$

$Casm = 6$

La relation ( )s'écrit $[R_1 + R_2 + \ldots + R_l \quad l\infty] = 6H = \quad 4H$. Il existe alors une fonction F telle que $divF = R_1 + R_2 + \ldots + R_l + \bar{P}_1 \quad (l+1)\infty$, donc $F \in \left((l+1)\infty\right)$ et d'après le lemme 1, on a

$F(x,y) = \left(\sum_{i\leq\frac{l+1}{2}} a_i x^i\right) + y\left(\sum_{j\leq\frac{l-4}{2}} b_j x^j\right)$

On a$F(\bar{P}_1) = 0$, d'où $a_0 \quad b_0 = 0$ .Aux points R_i on doit avoir

$$\left(\sum_{i\leq\frac{l+1}{2}} a_i x^i\right) + y\left(\sum_{j\leq\frac{l-4}{2}} b_j x^j\right) = 0 \ d'où y = \frac{\left(\sum_{i\leq\frac{l+1}{2}} a_i x^i\right)}{\sum_{j\leq\frac{l-4}{2}} b_j x^j}$$

et par suite la relation $y^2 = x^5 + 1$ donne l'équation (ε_1)

$$\left(\sum_{i\leq\frac{l+1}{2}} a_i x^i\right)^2 = \left(\sum_{j\leq\frac{l-4}{2}} b_j x^j\right)^2 (x^5 + 1)$$

On trouve ainsi une famille de points

$$F_6 = \left\{ \left(x, \ \frac{\sum_{i\leq\frac{l+1}{2}} a_i x^i}{\sum_{i\leq\frac{l-4}{2}} b_j x^j} \right) \middle| \begin{matrix} a_i, b_j \in \quad , \ a_0 \quad b_0 = 0 \\ etx racine de l'équation (\varepsilon_1) \end{matrix} \right\}.$$

$Casm = 5$

La relation ( )s'écrit $[R_1 + R_2 + \ldots + R_l \quad l\infty] = 5H = \quad 5H$. Il existe alors une fonction F telle que $divF = R_1 + R_2 + \ldots + R_l + P_0 \quad (l+1)\infty$, donc $F \in \quad \left((l+1)\infty\right)$ et d'après le lemme 1, on a

$$F(x,y) = \left(\sum_{i\leq\frac{l+1}{2}} a_i x^i\right) + y\left(\sum_{j\leq\frac{l-4}{2}} b_j x^j\right)$$

On a$F(P_0) = 0$ donne la relation $\sum_{i\leq\frac{l+1}{2}} (\ \ 1)^i a_i = 0$. Aux points R_i on doit avoir

$$\left(\sum_{i\leq\frac{l+1}{2}} a_i x^i\right) + y\left(\sum_{j\leq\frac{l-4}{2}} b_j x^j\right) = 0 \ d'où y = \frac{\left(\sum_{i\leq\frac{l+1}{2}} a_i x^i\right)}{\sum_{j\leq\frac{l-4}{2}} b_j x^j}$$

et par suite la relation $y^2 = x^5 + 1$ donne l'équation (ε_1)

$$\left(\sum_{i\leq\frac{l+1}{2}} a_i x^i\right)^2 = \left(\sum_{j\leq\frac{l-4}{2}} b_j x^j\right)^2 (x^5 + 1)$$

On trouve ainsi une famille de points

$$F_5 = \left(x, \ \frac{\sum_{i\leq\frac{l+1}{2}} a_i x^i}{\sum_{i\leq\frac{l-4}{2}} b_j x^j} \right) \left| \begin{matrix} a_i, b_j \in \quad verifiant \sum_{i\leq\frac{l+1}{2}} (\ \ 1)^i a_i = 0 \\ et \ x \ racine \ de \ l'équation \ (\varepsilon_1) \end{matrix} \right. .$$

RÉFÉRENCES

[Sch] E.F. Schaefer, Rational points on algebraic curves, lecture II, February5, 1999, Santa Clara Université.
[Sal] O. Sall, Points algébriques sur certains quotients de courbes de Fermat,C. R. *Acad. Sci. Paris Ser*. I 336 (2003) 117-120.

****