



ISSN: 2230-9926

Available online at <http://www.journalijdr.com>

IJDR

International Journal of Development Research

Vol. 13, Issue, 07, pp. 63275-63278, July, 2023

<https://doi.org/10.37118/ijdr.26964.07.2023>



RESEARCH ARTICLE

OPEN ACCESS

CONVOLUÇÃO COMO UM APELO DA NATUREZA

Maxwell Diógenes Bandeira de Melo^{1*}, Sergio Ricardo Gobira¹, Sergio Manuel Rivera Sanhueza¹, Eduardo Simões¹ e Adson Ferreira da Rocha²

¹Universidade Federal do Tocantins (UFT); ²Universidade de Brasília (UnB)

ARTICLE INFO

Article History:

Received 17th April, 2023
Received in revised form
20th May, 2023
Accepted 23rd June, 2023
Published online 28th July, 2023

KeyWords:

Convolução, Natureza, Algoritmo.

*Corresponding author:

Maxwell Diógenes Bandeira de Melo

ABSTRACT

In this manuscript, we show in an educational way, how the operation known as convolution works. This is an important subject as it has a relevant physical appeal. At first, we will discuss the sampling concept where we will briefly focus on the decomposition of signals through a function known as impulse function. We address the impulse function and talk about the peculiarities of its representation in the discrete domain. We then talk about time signal shifts and address some very simple algorithms that deal with the pure convolution problem, without noise and without filters, in an elementary focus. We will deep-dive into the concept with the convolution integral culminating to the discussion with the Toeplitz matrix which is a key component of discrete convolution. It is worth mentioning that the methodology used in this work is simple and may offer the possibility to test a linear physical system for any input, a subject that is little treated in current literature. Finally, we conclude with some notes on the famous operation which has been used a long time for testing linear and time invariant physical systems, as it is very important in real applications in signals, telecommunication and image processing.

Copyright©2023, Maxwell Diógenes Bandeira de Melo et al. This is an open access article distributed under the Creative Commons Attribution License, which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

Citation: Maxwell Diógenes Bandeira de Melo, Sergio Ricardo Gobira, Sergio Manuel Rivera Sanhueza, Eduardo Simões e Adson Ferreira da Rocha. 2023. "Convolução como um apelo da natureza". *International Journal of Development Research*, 13, (07), 63275-63278.

INTRODUCTION

Convolução é uma maneira de se combinar dois sinais e obter-se um terceiro sinal. É uma importante técnica em sinais e possui um apelo físico que é uma característica inerente aos sistemas naturais, pois os mesmos podem ser modelados por sua resposta ao impulso se forem lineares e invariantes no tempo (LTI). Utilizando-se uma estratégia da decomposição em impulsos em larguras infinitesimais, os sistemas podem ser modelados por um sinal chamado de resposta ao impulso. O conceito da convolução é importante porque relaciona esses três sinais de interesse: o sinal de entrada, o sinal de saída e a resposta ao impulso de um sistema. Um impulso é um sinal composto em todos os seus pontos por zeros, exceto em um único ponto, na origem, e pode ser visto como um degrau de altura infinita e largura tendendo a zero caracterizando-se por ser um sinal de área igual a 1 (um), que em essência é o módulo de sua energia, e também é conhecido como delta de Kronecker. A decomposição do impulso fornece uma forma de analisar sistemas físicos por amostra. Quando a decomposição do impulso é usada, o procedimento pode ser descrito por uma operação matemática chamada de convolução. Convolução é uma maneira matemática de se combinar dois sinais, obtendo-se um terceiro, sendo um dos conceitos mais importantes em processamento digital de sinais para obtenção de respostas de sistemas lineares e invariantes no

tempo. Os sistemas lineares podem ser descritos completamente por sua resposta ao impulso. A convolução relaciona três sinais de interesse, a saber: a entrada, a saída e a resposta ao impulso [2], [13], [14], [15] e [16]. Convolução é uma operação matemática formal, tal como multiplicação, adição ou a integração. A adição, dados dois números, produz um terceiro número, e a convolução, dados dois sinais, produz um terceiro sinal. Como em um filme que é exibido em quadros por segundo, da mesma forma temos o conceito de amostragem de uma função. Imaginemos uma função senoidal de frequência 1 Hz, ou seja, a cada segundo a função completa um período, que se repete. Na Figura 01a) mostra-se o retrato dessa função para uma amostragem de 0.01s, a saber, cem fotografias por segundo, dizemos que uma frequência de amostragem de 100 Hz foi utilizada. Note-se que a Figura 01a) lembra uma senoide. Caso diminua-se a frequência de amostragem para 0.05s, ou seja, 20 vezes por segundo ou 20 Hz, teríamos a função visualizada na Figura 01b) que ainda lembra uma senoide. Na Figura 01c) a frequência de amostragem é diminuída para 0.1s ou 10 Hz, e a função lembra muito pouco uma senoide. Na Figura 01d) contemplamos uma senoide com uma amostragem de 0.2s ou 5 Hz, cinco amostras por segundo, e a função não lembra em nada uma senoide. Como pode-se perceber a frequência de amostragem é um conceito importante quando queremos visualizar gráficos que representam as funções que observamos na natureza [1]. Usaremos esse conceito para descrever a convolução.

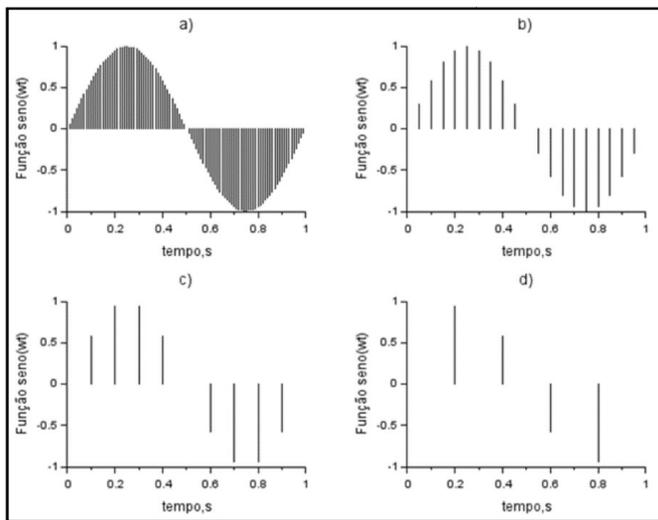


Figura 1. Senoides com frequências de amostragem de 100Hz, 20Hz, 10Hz e 5Hz, respectivamente

A Figura 02 mostra uma possível notação da convolução quando aplicada em sistemas lineares. Um sinal de entrada, $x[n]$, excita um sistema linear com uma resposta ao impulso, $h[n]$, resultando em um sinal de saída, $y[n]$. Na forma de equação: $x[n]*h[n]=y[n]$. Um sinal de entrada "convoluído" com a resposta ao impulso é igual ao sinal de saída. Assim, como a adição é representada pelo símbolo de mais, +, a Convolução pode ser representada por uma estrela, *, em algumas literaturas.

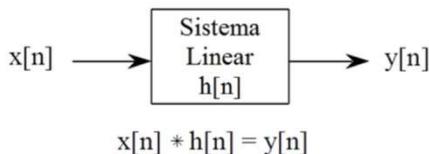


Figura 02. Um sistema linear, sendo $x[n]$ a entrada, $y[n]$ sua saída, e $h[n]$ a resposta deste sistema ao impulso. Figura adaptada de [12]

A Figura 03 define dois importantes termos utilizados neste artigo. O primeiro é a função delta, simbolizada pela letra grega delta, δ . A função delta neste artigo é aproximada pelo que é conhecido como um impulso normalizado, isto é, a amostra número zero tem magnitude de um, enquanto todas as outras amostras tem o valor de zero. Por esta razão, a função delta é frequentemente chamada de impulso unitário [2]. O segundo termo definido na Figura 03 é a resposta ao impulso. Como o próprio nome sugere, a resposta ao impulso é o sinal obtido na saída de um sistema linear e invariante no tempo quando a função delta (impulso unitário) é a entrada. Para dois sistemas distintos temos diferentes respostas ao impulso. Assim como os sinais de entrada e saída são geralmente chamados de $x[n]$ e $y[n]$, a resposta ao impulso é geralmente representada pelo símbolo $h[n]$ na sua forma discreta [12]. Qualquer impulso pode ser representado por uma função delta escalonada em sua magnitude deslocada no tempo. Considerando um sinal, $a[n]$, composto de zeros, exceto na amostra número 8, que tem um valor de -3. E semelhante a dizer que uma função delta está deslocada para a direita em 8 amostras e que foi multiplicada por -3. Na forma de equação podemos escrever: $a[n]=-3\delta[n-8]$. Tomando a função $a[n]$ como a entrada de um sistema, podemos utilizar as propriedades de homogeneidade e invariância para mostrar a saída deste sistema. Na hipótese de uma entrada $\delta[n]$ resultar em $h[n]$, a função $-3\delta[n-8]$, resulta em $-3h[n-8]$. Ou seja, a saída é a versão da resposta ao impulso que foi escalonada e deslocada na mesma quantidade que a função delta da entrada [8], [9], [10], [11], [12], [13], [14], [15] e [16]. Desta forma, ao saber a resposta ao impulso de um sistema, imediatamente pode-se conhecer como ele reagiria a qualquer entrada. Na Figura 04 mostramos o efeito de um deslocamento no tempo, neste caso um atraso, que

reflete-se como um deslocamento da forma de onda da Figura 01 a direita da origem. Na Figura 04a) temos $\sin(\omega t - \pi/8)$ na Figura 04b) temos $\sin(\omega t - \pi/4)$, na Figura 04c) temos $\sin(\omega t - \pi/2)$ e na Figura 04d) temos $\sin(\omega t - \pi)$.

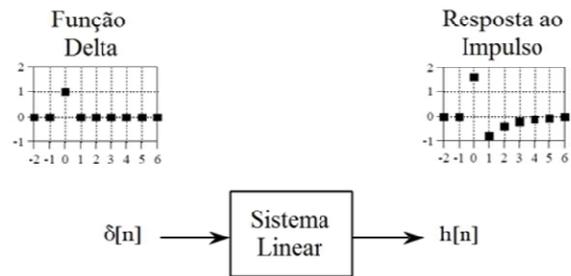


Figura 03. A função Delta, $\delta[n]$, em sua representação no espectro discreto e uma hipotética resposta ao impulso, $h[n]$, para a função Delta de Dirac real. Figura adaptada de [12]

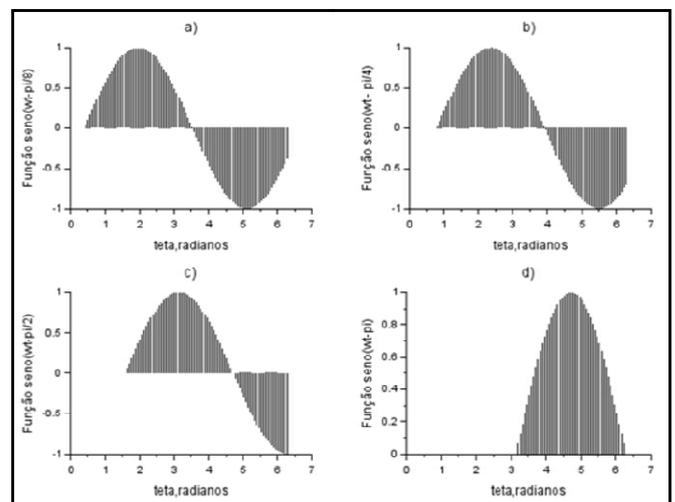


Figura 04. Função $\sin(\omega t)$ deslocada no tempo. Exemplos de deslocamentos no tempo. Na Figura 04a) temos $\sin(\omega t - \pi/8)$, na Figura 04b) temos $\sin(\omega t - \pi/4)$, na Figura 04c) temos $\sin(\omega t - \pi/2)$, e na Figura 04d) temos $\sin(\omega t - \pi)$.

Na Figura 05 mostra-se alguns exemplos de respostas ao impulso que para sistemas lineares e invariante no tempo podem ser modeladas por uma exponencial ou pela soma de várias delas [2], [8], [13], [15]. Um sistema invariante no tempo é um sistema linear que responde da mesma forma em qualquer ordenada temporal depois do marco inicial. Sistemas lineares são aqueles que possuem homogeneidade, o que significa que uma mudança na amplitude de um sinal de entrada resulta em uma mudança correspondente na amplitude do sinal de saída [3],[4],[5],[6]. Em termos matemáticos, se um sinal de entrada de $x[n]$ resultar em um sinal de saída de $y[n]$, uma entrada de $kx[n]$ resultará em uma saída de $ky[n]$, para qualquer sinal de entrada e uma constante real, k . E ainda, se uma entrada $x_1[n]$ produz uma saída $y_1[n]$, e uma entrada $x_2[n]$ produz uma saída $y_2[n]$, então uma entrada $x_1[n] + x_2[n]$ produzirá uma saída $y_1[n] + y_2[n]$. Há uma outra técnica para testar a linearidade menos formal mas muito usada, em que dado um sistema qualquer esse será linear se o mesmo para uma entrada senoidal responder com uma saída senoidal de mesma frequência que a entrada [12].

MATERIAIS E MÉTODOS

Convolução de Sinais: Nesse contexto de simulações computacionais usamos o software SciLab, disponível em <https://www.scilab.org/>. Na Figura 06 mostra-se um algoritmo para uma simulação, muito simples, da operação de convolução usando a

função nativa conv no SciLab com o intuito de contextualizá-la antes de descrever suas implicações [7].

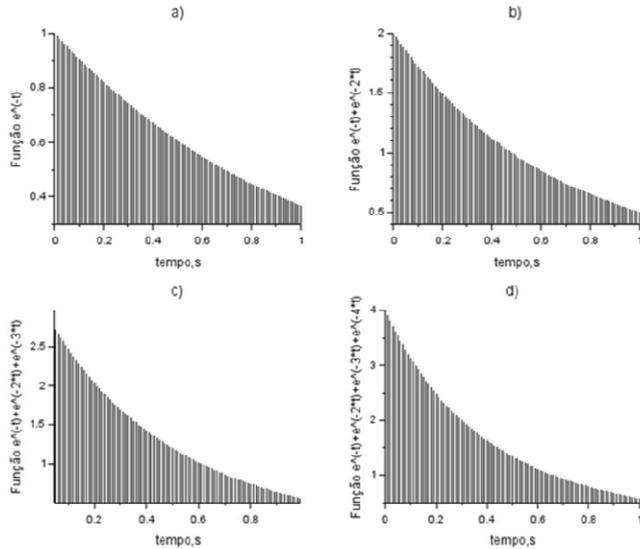


Figura 5. Exemplo de exponenciais que emulam a resposta ao impulso de sistema lineares. Veja em: a) e^{-t} , b) $e^{-t} + e^{-2t}$, c) $e^{-t} + e^{-2t} + e^{-3t}$, d) $e^{-t} + e^{-2t} + e^{-3t} + e^{-4t}$

Neste exemplo, os sinais de entrada possuem 6 (seis) amostras de comprimento, enquanto cada resposta ao impulso é composta por 5 (cinco) amostras. Na maioria das aplicações sem Física, o sinal de entrada possui centenas, milhares ou até mesmo milhões de amostras. A resposta ao impulso é normalmente muito menor, em termos de amostras digitais, medindo de apenas alguns pontos a algumas centenas de pontos, enquanto geralmente os sinais de entrada vão de milhares a milhões de pontos. Escolhemos por uma questão de didática, apenas 5 (cinco) amostras. A matemática por trás da convolução não se restringe ao comprimento dos sinais, no entanto, especifica o tamanho do sinal de saída. O comprimento do sinal de saída é igual ao tamanho do sinal de entrada mais o tamanho da resposta ao impulso, tudo somado menos um. Para os sinais da Figura 06, cada sinal de saída possuirá: $6+5-1=10$ (dez) amostras de comprimento. O sinal de entrada vai da amostra 0 (zero) a 5 (cinco), a resposta ao impulso de 0 a 4 e o sinal de saída vai da amostra 0 (zero) a 9 (nove).

```
t=0:1:9;
f=1;
h1=[1,-0.5,-0.25,-0.125,0];
x1=[0,1,2,3,4,5];
y1=conv(h1,x1)
h2=[1,-0.5,-0.25,-0.125,0];
x2=[1,1,1,1,1];
y2=conv(h2,x2);
h3=[1,-0.5,-0.25,-0.125,0];
x3=[5,4,3,2,1,0];
y3=conv(h3,x3);
h4=[1,-0.5,-0.25,-0.125,0];
x4=[10,10*exp(-1),10*exp(-2),10*exp(-3),10*exp(-4),10*exp(-5)];
y4=conv(h4,x4);
```

Figura 06. Programa que contextualiza a operação de convolução. As funções de excitação, x1, x2, x3 e x4, são vetores com seis posições que emulam uma reta crescente, um degrau unitário, uma reta decrescente e uma exponencial negativa, respectivamente. A resposta ao impulso hi, com i, posição no vetor, variando de um a quatro, é uma tradicional exponencial negativa multiplicada por uma senoide com cinco amostras.

RESULTADOS E DISCUSSÕES

A convolução pode ser entendida sob vários pontos de vistas, tentaremos explicá-la de um ponto de vista bem simples, utilizando-se como base o sinal de entrada. O sinal de entrada de 6 pontos, $x_i[n]$, é passado através de um sistema com resposta ao impulso de 5 pontos, $h_i[n]$, resultando em um sinal de saída de 10 pontos ($6+5-1=10$), $y[n]$. Em termos matemáticos, $x[n]$ é convoluído com $h[n]$ e gera $y[n]$. Neste exemplo, cada uma das 6 amostras do sinal de entrada contribuirá com uma versão escalonada e deslocada no tempo da resposta ao impulso para o sinal de saída. Essas dez amostras são mostradas na Figura 07, sendo a saída a soma de cada um desses escalonamentos e deslocamentos que efetivamente são geradores do sinal resultante, $y[n]$. Na Figura 08 mostra-se um estudo de caso que detalha um pouco mais o processo da convolução. Olhando detalhadamente para alguns destes cinco sinais na Figura 08, no quadro Emulação da Convolução, nota-se que o somatório das células geram a convolução, ou seja, o sinal $y[n]$. É possível dessa forma dar mais um passo para entender o problema sob um ponto de vista que poderia ser chamado de ponto de vista do sinal de entrada. Na Figura 08, a amostra 0 do sinal de resposta ao impulso, $h_1[0]$, vale 1. Quando o sinal $h[n]$ é decomposto em impulsos este se transforma em uma soma de impulsos representado como: $h[n]=1.\delta[n]-0,5.\delta[n-1]-0,25.\delta[n-2]-0,125.\delta[n-3]+0.\delta[n-4]$. O efeito é que $h[0]$ é multiplicado por $x[n]$, o restante das amostras são preenchidas com zeros. Logo, temos que $h[1]$ é multiplicado por $x[n-1]$, novamente o restante das amostras são preenchidas com zeros. Segue-se que $h[2]$ é multiplicado por $x[n-2]$, $h[3]$ é multiplicado por $x[n-3]$, $h[4]$ é multiplicado por $x[n-4]$, e sempre preenche-se com zeros as posições nos vetor de saída que ficam vazias. Este sinal, $y[n]$, que enfim é a soma de todos esses passos, ou seja, $y[n]=y_0[n]+y_1[n]+y_2[n]+y_3[n]+y_4[n]$, é mostrado na Figura 08, na tabela Emulação da Convolução. A operação de convolução é comutativa, ou seja, $x[n]*h[n]=h[n]*x[n]$ [2],[6],[11],[12]. A matemática não se importa com qual seja o sinal de entrada ou a resposta ao impulso, somente que dois sinais são convoluídos um com o outro. Portanto, sempre fazemos um caminho que seja o mais rápido em termos de esforço computacional [12]. As características de um sistema linear e invariante o tempo são completamente descritas por sua resposta ao impulso. Isso é a base de um algoritmo da convolução.

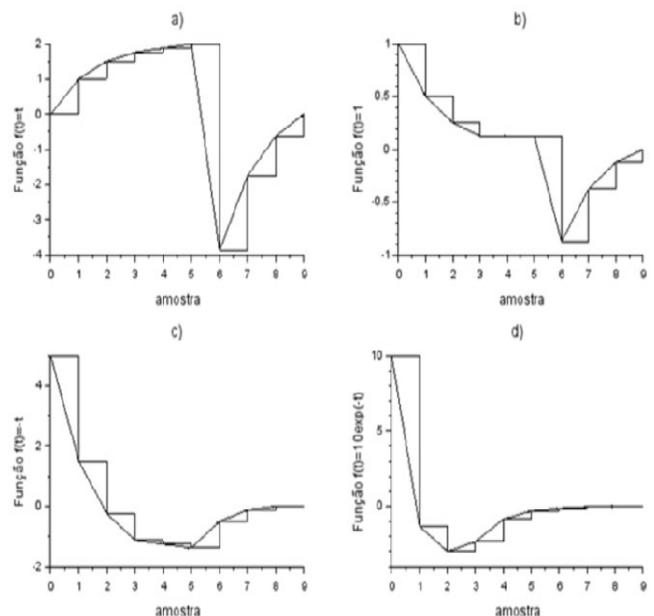


Figura 07. Convolução dos sinais, $h1=[1,-0.5,-0.25,-0.125,0]$ e $x1=[0,1,2,3,4,5]$; Figura 07a). $h2=[1,-0.5,-0.25,-0.125,0]$ e $x2=[1,1,1,1,1,1]$; Figura 07b). $h3=[1,-0.5,-0.25,-0.125,0]$ e $x3=[5,4,3,2,1,0]$; Figura 07c). $h4=[1,-0.5,-0.25,-0.125,0]$ e $x4=[10,10*exp(-1),10*exp(-2),10*exp(-3),10*exp(-4),10*exp(-5)]$; Figura 07d).

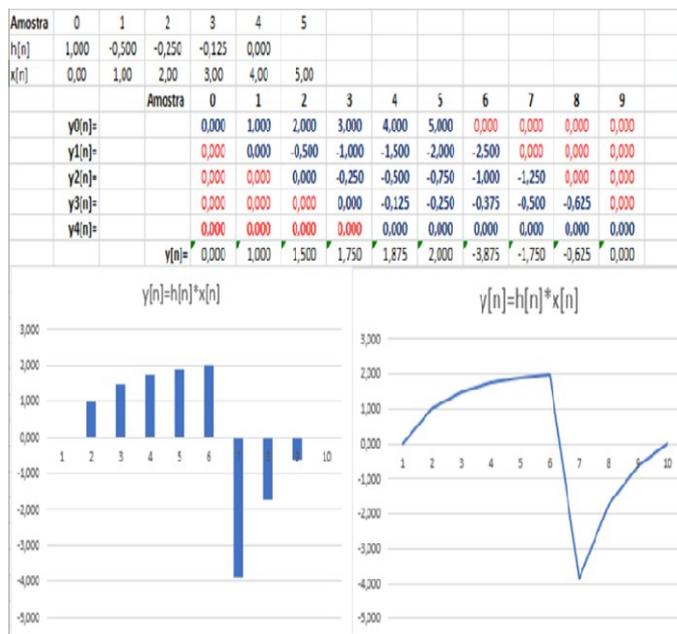


Figura 08. Emula, c̃ao manual da convolu, c̃ao. Veja Figura 07a) e compare. Neste caso como $h[n]*x[n]=x[n]*h[n]$, optamos pelo lado esquerdo da express̃ao pois assim faremos apenas 5 passos e ñao 6 passos como seria se opta ssemos por usar o lado direito da equa, c̃ao

CONCLUSÕES

Este artigo teve como principal foco o início de uma série de artigos que visam aprofundar o conceito de convolução e da conjuntura de sua utilidade no campo das ciências naturais. A operação possui uma conexão importante com a natureza e sem dúvidas há um forte apelo físico. A Convolução pode ser encarada como uma operação que soma dois sinais e obtém um terceiro que é a resposta do sistema. Desde que se saiba sua resposta ao impulso, é possível mensurar sua saída para qualquer entrada desde que o sistema seja linear e invariante no tempo. Também é interessante notar que qualquer sinal de entrada pode ser representado por uma soma infinita de impulsos, onde vê-se a versatilidade do método. Ainda mais, dada as características de linearidade alcançadas para um sistema, podemos determinar a saída para qualquer entrada desde que saibamos a resposta ao impulso de um sistema. Assim, pode-se prever a saída de qualquer sistema para qualquer entrada se o mesmo for linear e invariante no tempo.

Agradecimentos: A Universidade Federal do Tocantins e a Universidade de Brasília pelo apoio.

REFERENCES

- [1] AMOS GILAT. MATLAB com aplicações em engenharia. Bookman, 2006.a.
- [2] BALMER, L. Signals and Systems: An Introduction, Prentice Hall, 1991, 466 p.
- [3] BOYCE, W.E. e DIPRIMA, R. C. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno, 8a ed. Editora LTC, p. 172.
- [4] GIROD, BERND. Sinais e Sistemas”, Editora: LTC, 2001.
- [5] J. R. BUCK, M. M. DANIEL, AND A. C. SINGER. “Computer Explorations in Signals and Systems Using MATLAB, Second Edition, Prentice Hall, New Jersey, 2002.
- [6] LATHI, B.P.”Sinais e sistemas lineares”, Bookman, 2007.
- [7] MATLAB; McGraw Hill Publications, New York, 2004.
- [8] OGATA, K. Engenharia de Controle Moderno, 4a ed. Editora Pearson.
- [9] OPPENHEIM, ALAN V., Schafer, Ronald W., “Discrete-Time Signal Processing”, Pretice-Hall International, Inc, 1989.
- [10] R. C. DORF AND R. H. BISHOP. Sistemas de Controle Modernos, 11a Ed., AddisonWesley, 2010
- [11] HWEL, H. Sinais e Sistemas - 570 Problemas Totalmente Resolvidos - 2ª Ed. Col. Schaum- (8577809382)
- [12] SMITH, S. W. The Scientist and Engineer’s Guide to Digital Signal Process Digital Signal Processing, 2nd ed. San Diego: California Technical Pyblishing, 1999, p. 114 e 121.
- [13] MELO, M.D.B. DE, ARAUJO H.X., DA ROCHA, A.F. A Novel Methodology for Signal Recovery in Linear Time Invariant Systems for Medicine Applications. Przegląd Elektrotechniczny, ISSN 0033-2097, R. 92 NR 010/2016.
- [14] MELO, MDB DE, ARAUJO HX, GOBIRA S.R., ROCHA, A.F. An Algorithm for the Enhancement of Thermodilution Signals. International Journal of Development Research; 0904:26890-26896.
- [15] DA ROCHA A.F. The Dynamic Behavior of Thermistor Probes. Dissertation for degree of Doctor of Philosophy. University of Texas, Austin, May 1997.
- [16] MAXWELL DIÓGENES BANDEIRA DE MELO^{1†}, GLENDA MICHELE BOTELHO¹, VIVIANE FERNANDES MOREIRA¹, IVAN NEY ALVIZURI ROMANI¹, ARY HENRIQUE MORAIS DE OLIVEIRA¹ AND ADSON FERREIRA DA ROCHA². CHARACTERIZATION OF THE TEMPORAL RESPONSE OF THE TEMPERATURE SENSOR OF SWAN-GANZ CATHETER. ¹Federal University of Tocantins (UFT); ²Brasília University (UnB). *International Journal of Development Research*, vol. 11, Issue, 03, March, 2021.
