Available online at http://www.journalijdr.com

IJDR

ISSN: 2230-9926

International Journal of Development Research
Vol. 12, Issue, 09, pp. 59191-59195, September, 2022
https://doi.org/10.37118/ijdr.25282.09.2022

RESEARCH ARTICLE OPEN ACCESS

MATEMÁTICO GEORGE PÓLYA E O TEOREMA DE PITÁGORAS

[1*]Enoque da Silva Reis, [2]Irene Magalhães Craveiro, [3]Marcia Aparecida Garcia Teixeira, [4]Mariana Fabiane Garcia Travassos and [5]Maycon Santos de Souza

[1]Pós Doutorado pela Universidade Federal da Grande Dourados. Doutor e Mestre em Educação Matemática pela Universidade Federal do Mato Grosso do Sul. Especialista em Estatística pela Universidade Federal de Lavras MG. Graduado em Matemática Licenciatura Plena com Ênfase em Ciências da Computação pela Universidade para o Desenvolvimento do Estado e da Região do Pantanal. Líder do Grupo de Estudo e Pesquisa em História da Educação Matemática Escolar GEPHEME. Professor Adjunto da Universidade Federal de Rondônia; [2]Pós Doutora e Doutora em Matemática pela Universidade Estadual de Campinas. Mestre em Ciências Matemática pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho. Graduada em Matemática pela Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. Professora Adjunta na Universidade Federal da Grande Dourados; [3]Mestre em Matemática pela Universidade Federal da Grande Dourados. Especialista em Ensino da Matemática pela Universidade Federal da Grande Dourados. Graduada em Matemática pela Universidade Federal de Mato Grosso do Sul; [4]Mestre em Matemática pela Universidade Federal da Grande Dourados. Especialista em Formação de Profissionais da Educação, pela Universidade Federal da Grande Dourados; Possui graduação em Matemática Licenciatura pelo Centro Universitário da Grande Dourados; [5]Graduado em Matemática Licenciatura pela Universidade Federal de Rondônia

ARTICLE INFO

Article History:
Received 19th August, 2022
Received in revised form
11th August, 2022
Accepted 29th September, 2022
Published online 30th September, 2022

Key Words:

Teorema de Pitágoras; Razão de Semelhança de Figuras; George Pólya.

Corresponding author:
Enoque da Silva Reis

ABSTRACT

O presente estudo aborda um breve histórico da vida e obra do matemático húngaro George Pólya como prelúdio para o objetivo do mesmo, que se centra na análise da demonstração feita por ele do Teorema de Pitágoras, dada pela identidade $c^2=a^2 + b^2$, onde *a, b* e *c* são números positivos. O referencial teórico apresenta definições de semelhança e razão de semelhança entre áreas de figuras planas. A metodologia é alicerçada na forma qualitativa por meio de análise documental da demonstração do autor publicada em seu livro *Induction and Analogy in Mathematics*. O resultado traz a demonstração com base na geometria plana, em particular fazendo uso de conceitos de áreas de figuras planas.

Citation: Enoque da Silva Reis, Irene Magalhães Craveiro, Marcia Aparecida Garcia Teixeira, Mariana Fabiane Garcia Travassos and Maycon Santos de Souza. 2022. *"*Matemático george pólya e o teorema de pitágoras*", International Journal of Development Research, 12, (09), 59191-59195.*

INTRODUCTION

O Grupo de Estudo e Pesquisa em História da Educação Matemática Escolar (GEPHEME-RO), vem se dedicando a busca de materiais históricos que versam sobre o Teorema de Pitágoras, e e neste movimento foi identificado o quarto brasileiro que demonstrou este teorema de forma inédita, surgindo então o artigo intitulado "Uma Releitura da Demonstração do Quadrado da Hypothenusa, dada Pelo Dr. Augusto Telles"[1], durante o desenvolvimento dessa obra foi observado que o húngaro George Pólya também havia demons trado esse teorema, o que despertou o interesse em estudar seu feito e

[1] Este artigo pode ser visto na integra em: Umareleitura da demonstração do quadrado da hypothenusa dada pelo dr. Augusto Telles | International JournalofDevelopmentResearch (IJDR) (journalijdr.com).

suahistória, realizando assim, esta releitura que segue. Dessa forma apresentamos neste estudo um breve histórico sobre o matemático George Pólya, com elementos de sua vida pessoal e suas contribuições para a matemática e a educação matemática, em especial sua demonstração do Teorema: "A área do quadrado cujo lado é a hipotenusa de um triângulo é igual a soma das áreas dos quadrados que tem como lados cada um dos catetos" (Lima, 2006, p. 52) o qual é amplamente conhecido como Teorema de Pitágoras.

George Pólya (1887–1985) é considerado um dos matemáticos mais importantes do século XX. Nascido na Hungria, ele passou a maior parte do seu tempo pesquisando na Universidade de Stanford nos Estados Unidos devido à situação política da Europa na época da Segunda Guerra Mundial. A demonstração de Pólya para o teorema de Pitágoras é fundamentada na conhecida proposição: "as áreas de duas figuras semelhantes estão entre si como o quadrado da razão de semelhança", ou seja, se as figuras construídas sobre os lados de um triângulo retângulo, independentes de sua forma geométrica, forem semelhantes, então, o padrão pitagórico das áreas é satisfeito, isto é, a área da figura construída sobre o hipotenusa é igual à soma das áreas das figuras construídas sobre os catetos.

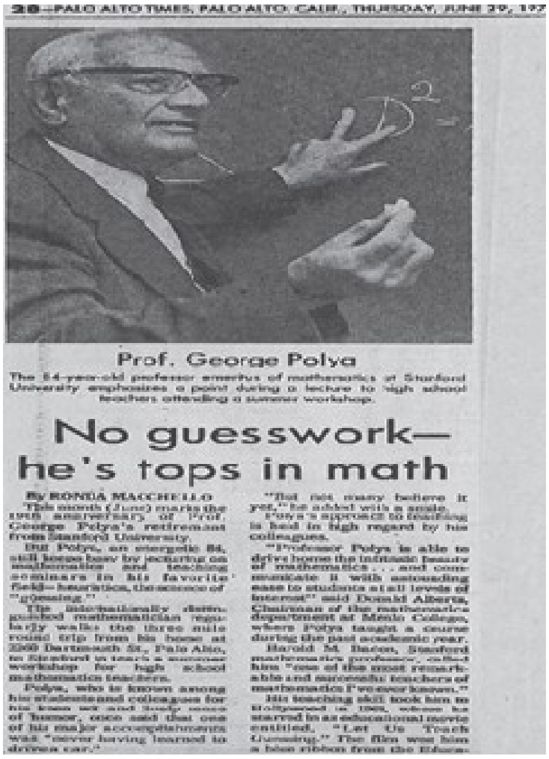
Breve histórico da vida e obra de George Pólya: George Pólya (1887–1985) nasceu em Budapeste na Hungria em 13 de dezembro de 1887, e morreu em 7 de setembro de 1985 em Palo Alto, Califórnia, Estados Unidos. Seus pais eram Anna Deutsch e Jakab Pólya, ambos judeus. O nome Pólya foi trocado quando György nasceu, assim como seu nome originalmente. Anteriormente, o nome do pai era Jakab Pollák, identificando a sua origem judia e de acordo a mudança histórica, em 1867 a Hungria se uniu ao Império Austríaco, no então chamado Império Austro-Húngaro que se dissolveu em 1918 após a segunda guerra mundial, nesta união os estados austríaco e húngaro foram coiguais, os assuntos estrangeiros e militares eram submetidos à supervisão conjunta, mas todos os outros temas governamentais eram divididos (Anderson, 2004). Essa modificação ocorreu com intuito de alavancar sua carreira acadêmica e seu pai por entender os motivos desta transformação.

Fonte:https://mathshistory.st-andrews.ac.uk(07/09/2021)

Figura 1. Foto de George Pólya

Jakab estudou direito, abriu uma empresa que faliu,e depois trabalhou para uma seguradora internacional. No entanto, o que ele queria mesmo era ter um cargo na Universidade, onde pudesse fazer pesquisas sobre os assuntos que realmente lhe interessavam, economia e estatística (Soares, 2017). Depois de 1867, a Hungria já havia alcançado total independência interna, dentro da monarquia austro-húngara, e a filosofia política do país buscava promover um estado húngaro que fosse verdadeiramente forte (Anderson, 2004). Assim o progenitor de Polya buscou aumentar suas chances de conseguir um emprego e se tornar um catedrático mudando seu nome que soava judeu para um que realmente soava húngaro, ou seja, de Pollák para Polya (Pinheiro, 2017). E isso ocorreu em 1882, não podemos inferir se realmente contribuiu para seu sucesso na obtenção do emprego na Universidade de Budapeste, embora tenha conseguido pouco antes de sua morte, depois de seu quinquagésimo aniversário, quando George tinha 10 anos, Jakab Pólya morreu em 1897, deixando sua esposa, Anna, 44, e cinco filhos (Robertson & O´Connor, 2015). Embora os pais de Pólya fossem judeus, George foi batizado na Igreja Católica Romana logo após seu nascimento. Pois Jakab, Anna e seus até então três filhos se converteram da fé judaica à fé católica romana a partir de 1886, um ano antes do nascimento de George (Robertson & O´Connor, 2015).

George Pólya iniciou seus estudos básicos na Hungria onde viveu até a conclusão do nível superior. Na ocasião do seu término do ensino básico em 1894 recebeu seu certificado com a menção: "diligência e bom comportamento" (Pinheiro, 2017). Em seguida, ele entrou no *Ginásio Dániel Berzsenyi* para estudar Grego e latim, além de alemão e húngaro (Robertson & O´Connor, 2015). As disciplinas preferidas de Pólya na escola eram biologia e literatura, esta última em que obteve nota "excelente", além de geografia e outras. É raro que alguém que passaria a vida fascinado pelos diversos ramos da matemática, não se apaixonasse pela matéria no ensino médio, como foi o caso de Pólya. Ele não tirou notas muito boas em matemática no colégio; em geometria obteve o grau "satisfatório". Em aritmética, ele se saiu melhor. A razão para essa falta de sucesso pode muito bem ter sido o ensino ruim; ele mesmo descreve seus três professores de matemática do ensino médio como "professores péssimos" (Pinheiro, 2017). Pólya ingressou na Universidade de Budapeste em 1905 com o apoio financeiro de seu irmão Jenö, que já era cirurgião. Ele começou estudando Direito, mas não se adaptou e desistiu após um semestre. Ele então estudou suas disciplinas favoritas da escola, línguas e literatura, por dois anos, assim, obteveum certificado que lhe permitiu ensinar latim e húngaro no ginásio. Ele tinha orgulho disso, embora nunca tenha feito uso desse diploma (Robertson & O´Connor, 2015). Mais tarde ele foi atraído pela filosofia, masseuprofessor, Bernát Alexander, o aconselhou a estudar física e matemática, para ajudá-lo a entender o assunto, então ele acabou estudando matemática. Certa vez fez um comentário sábio, que não devia ser levado a sério: Achava que não era bom o suficiente para a física e bom demais para a filosofia. A matemática é intermediária (Robertson & O´Connor, 2015). Na Universidade de Budapeste, Pólya aprendeu física com Loránd Eötvös e matemática com Lipót Fejér. Pólya passou o ano de 1910-11 estudando na Universidade de Viena, onde ganhou dinheiro ensinando o filho de um importante dignitário local. Em Viena, ele frequentou aulas de matemática com Wirtinger e Mertens, mas manteve seu forte interesse pela física, frequentando aulas de relatividade, óptica e assim por diante. No ano seguinte, ele retornou a Budapeste, onde concluiu seu doutorado por resolver, essencialmente sem supervisão, um problema de teoria da probabilidade geométrica. Mais tarde, passou boa parte de 1912 e 1913 em Göttingen, convivendo com matemáticos como Klein, Carathéodory, Hilbert, Runge, Edmund Landau, Weyl, Hecke, Courant e Toeplitz (Guimarães, 2010; Pinheiro, 2017). Recebeu o convite para uma vaga no Eidgenossiche Technische Hochsclule Zurich em Zurique, além de Hurwitz, Pólya tinha Geiser, Bernays, Zermelo e Weyl como colegas (Pinheiro, 2017). Devemos destacar que sua chegada a Zurique foi no ano do início da Primeira Guerra Mundial, mas a princípio isso não causou problemas para Pólya, pois ele havia se machucado jogando futebol quando era estudante e, portanto, não era fisicamente qualificado para entrar no exército húngaro. Isso se adequava bem à sua visão pacifista. Ele assumiu a cidadania suíça e, em 1918, casou-se com, Stella Vera Weber, filha do professor de física da Universidade de Neuchâtel (Pinheiro, 2017). Pólya foi promovido a professor extraordinário em ETH, sendo essa sigla advinda do alemão Eidgenössische Technische Hochschule (Universidade Federal de Tecnologia) de Zurique em 1920. Obteve a bolsa Rockefeller em 1924 para estudar com Hardy na Inglaterra. Ele passou parte de 1924 em Oxford e em Cambridge, trabalhando com Hardy e Littlewood na teoria dos números. Devido às suas publicações, foi promovido a professor titular da ETH em 1928 (Guimarães & Kilpatrick, 2010). Enquanto ainda estava em Zurique, teve destaque em sua produção matemática, publicando artigos sobre séries, teoria dos números, combinatória e sistemas de rotação. No ano seguinte, ele adicionou outros tópicos, sobre astronomia e probabilidade. Foi então que publicou *Howto Resolve,* onde explica que para resolver problemas é preciso estudar heurísticas (Pinheiro, 2017). Pólya lançou outros livros sobre a arte de resolver problemas como *Mathematics and Plausible Reasoning* (1954) e *The Mathematical Discovery,* publicado em dois volumes (1962,1965) (Pinheiro, 2017). De forma que muitas pessoas consideram que sua maior contribuição para a matemática foi o trabalho de como ensiná-la. Em 1940, perante as perseguições nazistas na Europa, Pólya partiu para os Estados Unidos, onde fixou-se em Palo Alto, Califórnia, ingressando na Universidade de Stanford.


28—PALO ALTO TIMES, PALO ALTO, CALIF., THURSDAY, JUNE 29, 197

Prof. George Polya

The 84-year-old professor emeritus of mathematics at Stanford University emphasizes a point during a lecture to high school teachers attending a summer workshop.

No guesswork— he's tops in math

Fonte: (Guimarães & Kilpatrick, 2010)

Figura 2. Jeremy Kilpatrick: entrevista do Professor George Pólya

Em 1953, Pólya aposentou-se de Stanford, mas ainda se manteve ativo na vida acadêmica, especialmente no que diz respeito à educação matemática. Ele conservou seu relacionamento com Stanford na qualidade de professor emérito e em 13 de dezembro de 1977 um jantar foi oferecido lá para comemorar seus noventa anos. Ele continuou sua carreira de professor, chegou a ministrar em 1978, um curso de combinatória no Departamento de Ciência da Computação em Stanford (O´Connor, 2015). Ele recebeu muitas homenagens por suas contribuições, incluindo membros honorários da Academia Húngara, da Sociedade de Matemática de Londres, da Associação de Matemática da Grã-Bretanha e da Sociedade de Matemática Suíça. Pólya também foi membro eleito da Academia Nacional de Ciências dos Estados Unidos, da Academia Americana de Artes e Ciências, da Academia Internacional de Filosofia das Ciências de Bruxelas e do Conselho de Matemática da Califórnia (Soares, 2017). Ele também era um integrante correspondente da Academia de Ciências de Paris. Pólya defendeu que ensinar não é uma ciência, é uma arte. Em matemática, trata-se de aprender a lidar com a abstração. A matemática é sobre números e os números são uma abstração. Ao resolver um problema, a primeira coisa que devemos fazer é abstraí-lo, depois resolvê-lo e, finalmente, especificar a solução. Fazer matemática significa, antes de tudo, ser capaz de resolver problemas matemáticos.

Trabalhou numa grande variedade de tópicos matemáticos, que incluíam séries, teoria dos números, combinatória, e teoria das probabilidades. Entre os seus maiores legados está a caracterização, um modelo de como resolver problemas de matemática, e de descrever como pode ser ensinada a "Arte de Resolução de Problemas", relacionada à heurística de resolução de problemas matemáticos com várias publicações relativas ao assunto, tendo como destaque a obra *How To Solve It* que vendeu mais de um milhão de cópias em 1957 (Soares, 2017). É o primeiro livro em que Pólya explana as suas ideias sobre a resolução de problemas e os métodos heurísticos, ideias que viria a retomar, desenvolvendo-as e aprofundando-as em obras posteriores. Pólya é reconhecido como o primeiro matemático a apresentar uma heurística de resolução de problemas específica para a matemática, por isso, representa uma referência no assunto. Por este e outros motivos, nos atrevemos a trazer para esta discussão o termo *expertise* que conforme Hofstetter e Valente (2017, p. 57):

> "[...] a noção de expertise: uma instância, em princípio reconhecida como legítima, atribuída a um ou a vários especialistas – supostamente distinguidos pelos seus conhecimentos, atitudes, experiências – a fim de examinar uma situação, de avaliar um fenômeno, de constatar fatos".

E ainda ressaltamos neste momento (Reis, 2019) que expõe a ideia da existência de uma rede de *expertise*, que aqui optamos em fazer uso, pois nosso intuito não é afirmar veemente que Pólya foi um expert, mas sim, enfatizar que ele fez parte de uma rede que traçou caminhos para a ideia de resolução de problemas ideias que até os dias atuais são estudadas e utilizadas. E assim observamos que se trata de um autor de diversas obras na área de matemática e educação matemática, e assim deixando para as novas gerações sua contribuição. E por fim, nota-se o quão respeitosas foram tais contribuições que em 1976, a Associação de Matemática dos E.U.A., criou o Prémio George Pólya, em reconhecimento a esse grande catedrático.

Teorema de "Pitágoras": De forma significativa o Teorema de Pitágoras é considerado, por vários estudiosos, um dos teoremas mais importantes da Matemática. Vários resultados em geometria e na solução de problemas práticos relacionados a medidas foram descobertos e são demonstrados por meio dele. A associação desse tão conhecido teorema relativo a triângulos reângulos com o nome do grego Pitágoras, é universal. Embora seja questionável a atribuição a ele da descoberta e demonstração do mesmo, existem evidências que indicam que os antigos babilônios por volta de 1700 a.C., já conheciam o teorema cerca de mil anos antes da época de Pitágoras, além de achados de sua utilização nos registros matemáticos das civilizações egípcia, indiana, chinesa (Gaspar, 2015). Pitágoras foi um filósofo, matemático e físico grego nascido em 570 a.C., na ilha de Sarros na Grécia. Não existem muitos registros sobre o começo da vida de Pitágoras, só sabe-se que ainda jovem já conhecia diversas áreas do conhecimento como matemática e filosofia. Em busca de mais informações, estima-se que Pitágoras tenha viajado por lugares como Egito, Creta e Palestina. Infere-se que foi numa dessas viagens ao Egito que o grego formulou uma de suas teorias mais famosas e influentes: o teorema de Pitágoras. No Egito ele teria se impressionado com as pirâmides e começado a estudar a estrutura dos triângulos retângulos, o que levou à formulação deste teorema. Por sua estimável beleza e inquestionável importância, devido a suas aplicações nas mais diversas ciências como a matemática, a física e a química, o teorema de Pitágoras chama a atenção de inúmeros estudiosos que contribuíram para um vasto repositório de demonstrações deste teorema. A mais conhecida e utilizada é a encontrada no livro I dos *Elementos* de Euclides de Alexandria (300 A.C.). As centenas de demonstrações apresentadas até a atualidade do teorema são derivadas de recursos matemáticos como: Igualdade das áreas dos quadriláteros, figuras geométricas nas quais as áreas se mantém, princípio da igualdade da decomposição, princípio da igualdade do completamento, operações algébricas, relações de semelhança, métodos vetoriais, métodos da geometria analítica dentre outros (Bastian, 2000), podemos citar a atribuída a W.Rupert,1900 do tipo algébrico, utilizando-se de uma circunferência; a do presidente James Abram Garfield dos Estados Unidos, do tipo algébrico ou geométrico, por meio da comparação de áreas; Bhaskara no século XII d.C. do tipo geométrico com base na comparação de áreas por meio de superposição de figuras; Liu Hui, 270 d. C. Geometria por transposição de elementos e a de Euclides, do livro Elementos, 300 a. C., Proposição 47 I, que também aparece na obra de Tâbit Ibn (826-

901), usa geometria por transformação, deixando a área dos quadriláteros invariante.

Referencial Teórico Matemático

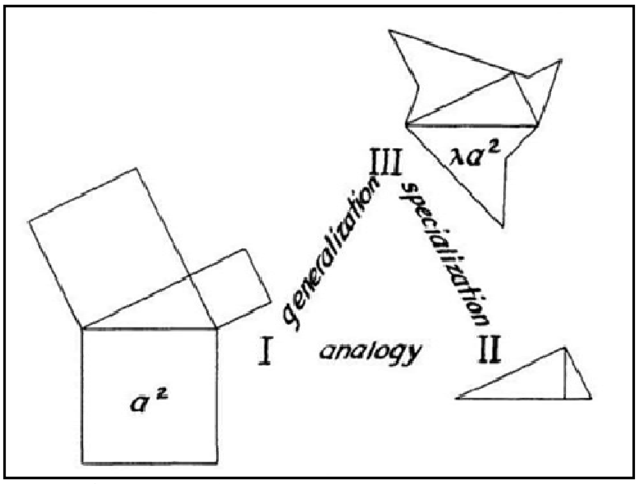
Definição 1: Sejam pontos X e Y, quaisquer, temos que $\underline{XY}$ e $m(\underline{XY})$ denota respectivamente o segmento XY e a medida de segmento XY;
Definição 2: Umasemelhança de razãor é uma bijeção $y: F \rightarrow F'$, que transforma pontos X e Y quaisquer em $X' = y(X)$ e $Y' = y(X)$, tais que $\underline{X'Y'} = k\underline{XY}$, com k real;

Definição 3: Se F e F' são semelhantes, com razão de semelhança k, então o segmento de reta XY e o segmento de reta $X'Y'$ são homólogos;

Definição 4: Seja$L$ uma figura plana, então denotamos $S(L)$ a área da figura L;

Definição 5: A razão entre áreas de polígonos semelhantes é igual aoquadrado da razão de semelhança, ouseja, sejamdois polígonos semelhantes de áreas $S(L)$e $S(L')$, respectivamente, comrazão de semelhançak, então $\frac{S(L)}{S(L')} = k^2$.

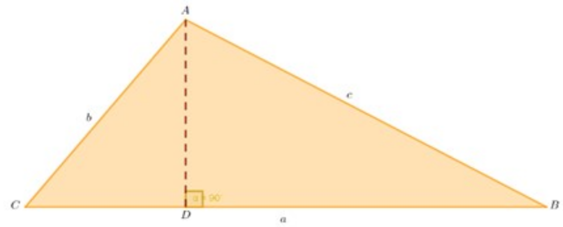
A Demonstração de Pólya: Passamos agora a explorar a demonstração elaborada por George Pólya para o Teorema de Pitágoras que se baseia na proposição: "Se duas figuras são semelhantes, a razão entre suas áreas é igual ao quadrado da razão de semelhança"[2] " (Lima, 2006, p. 57). Em sua demonstração original publicada em seu livro "*Induction and Analogy in Mathematics*", Polya mostra com o uso de raciocínio matemático e pouca álgebra, a analogia, especialização e generalização do Teorema de Pitágoras a partir da análise do diagrama apresentadona na Figura 3. Esse matemático contribuiu com os métodos de resolução de problemas, sendo estes conhecidos na Educação Matemática por meio do livro "How to Solve it". Também responsável pela autoria de uma demonstração do teorema de Pitágoras, observando a feita por Euclides e a partir daí estabelecendo uma generalização. A ideia que consiste no primeiro passo foi observar a demonstração dada por Euclides, que geometricamente é dada pela construção de três quadrados de lados de um triângulo de medidas *a, b,* e *c* que são respectivamente a hipotenusa a, e os catetos b e c, respectivamente.
O segundo passo do autor foif azer a especialização com esse mesmo triângulo retângulo *ABC*, de hipotenusa a e catetos b e c, traçando a altura *CD* relativa a hipotenusa a conforme Figura 4.



Fonte: (Pólya, p.16, 1954)

Figura 3. Esquema de Pólya descrito no livro Induction and Analogy in Mathematics

[2]Caso o leitortenhainteresse em se aprofundarnessa temática consulte o livro "MeuProfessor de Matemática e outrashistórias". 6 ed. Rio de Janeiro: SBM,2006 de Elon Lages Lima.



Fonte: Autores

Figura 4. Especialização de Pólya

Tem-se então três triângulos semelhantes na figura 4, triângulo *ABC*, triângulo *ABD* e triângulo *ACD*, que podemos passar a chamar de figuras *F*,*G* e *H* respectivamente. Daí observamos que além de *F*, *G* e *H* serem figuras semelhantes, também satisfazem: $S(F) = S(G) + S(H)$, pois $S(ABC) = S(ABD) + (ACD)$. O terceiro passo percebido por Polya que ele chamou de generalização foi considerar sobre a hipotenusa do triângulo *ABC* uma figura retilínea F desenhada sobre esse lado do triângulo fixado, e em seguida considerar maisduas figuras retilíneas sobre seus respectivos catetos b e c, sendoessa figuras rotuladas *G* e *H*, respectivamente com a hipótese que *G, F* e *H*são figuras semelhantes, logo após, usar a razão de semelhança entre áreas de figuras planas e a partir daíconclui-se o que é chamado de generalização do Teorema de Pitágoras, ou seja, *S(F)=F.*

Releitura da Generalização de Pólya

Destacamos nesse tópico a análise da *figura 3* proposta por Polya que generaliza o teorema de Pitágoras. Optamos em seguir a mesma característica do autor que foi desenvolvida de forma descritiva sem o uso de ilustrações: uma prática habitual em escritas matemáticas no período em que Polya realizou essa demonstração. Para isso, suponha que as figuras *F*, *G* e *H* são semelhantes e construídas sobre os lados de um triângulo retângulo *ABC* de comprimento, hipotenusa igual a a e os catetos b e c, respectivamente. Com essas hipóteses conclui-se que a área de *F* é igual a área de *G* somada com a área de *H*, em símbolos, *S(F)=S(G)+S(H).*

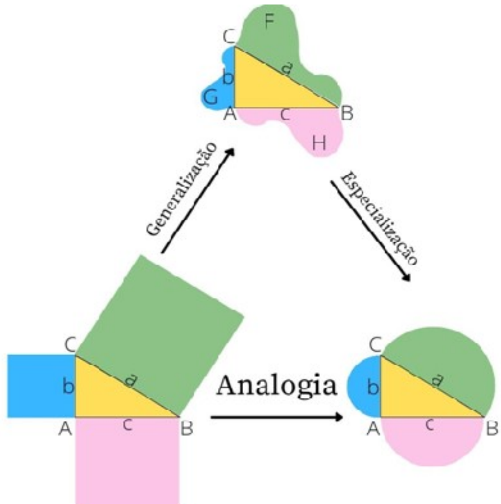
Como *F,G* e *H* sãosemelhantes, obtemos as seguintesrelações: $\frac{m(\underline{AC})}{m(\underline{CB})} = \frac{b}{a}\frac{m(\underline{AB})}{m(\underline{CB})} = \frac{c}{a}\frac{m(\underline{AB})}{m(\underline{CA})} = \frac{c}{b}$. Que são razões de semelhança de *G* para *F*, de *H* para *F* e de *H* para *G*.

Sejam*F'*, *G'* e *H'* outras figuras semelhantesconstruídas sobre a hipotenusa a e os catetos bec do triânguloretângulo*ABC*. Então, concluímos que as razões de semelhança de *G'* para *F'* é$\frac{b}{a}$, de *H'* para *F'* é igual a$\frac{c}{a}$e de *H'* para *G'* é $\frac{c}{b}$. Dessa forma, de acordo os nosso elementos matemáticos coletadostemos: $\frac{S(G')}{S(F')} = \frac{b^2}{a^2} = \frac{S(G)}{S(F)}$; $\frac{S(H')}{S(F')} = \frac{c^2}{a^2} = \frac{S(H)}{S(F)}$; $\frac{S(H')}{S(G')} = \frac{c^2}{b^2} = \frac{S(H)}{S(G)}$. Logo, $\frac{S(H)}{S(F)} = \frac{S(H')}{S(F')}$. Ou seja, $\frac{S(F')}{S(F)} = \frac{S(H')}{S(H)}$. Da mesma forma:$\frac{S(H')}{S(H)} = \frac{S(F')}{S(F)}$,e $\frac{S(H')}{S(H)} = \frac{S(G')}{S(G)}$. Então, fazendo $\frac{S(H')}{S(H)} = \alpha$. Então obtemos, $S(H') = \alpha\, S(H), S(F') = \alpha\, S(F)$, onde α é um número real positivo.

Portanto, para quaisquer Figuras , *G'* e *H'*, semelhantes construídas sobre os triângulos retângulos *ABC* de hipotenusa a e catetos b e c, respectivamente temos:

$$S(F') = \alpha\, S(F) = \alpha\, S\big((G) + S(H)\big) = \alpha\, S(G) + \alpha\, S(H)$$
$$= S(G') + S(H').$$

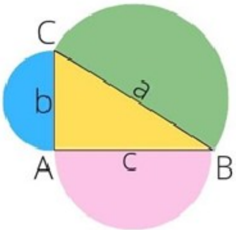
Na releitura que fizemos em nenhum momento usamos o fato da figura ser retilínea, ouseja, polígonos irregulares. Entretanto, se considerarmos os elementos matemáticos em questão as figuras *F*, *G* e *H* como figuras curvilíneas semelhantes o resultado prova-se da mesma forma.



Fonte: Os Autores.

Figura 5. Diagrama do Pólya com figuras curvilíneas

Para isso, vamos considerar três semicírculos ,’,” , construídos sobre os lados dos triângulos *ABC*, como descritos na Figura 6 cujos centros são *O*, *O*’ e *O*” que são pontos médios das medidas da hipotenusa *a* e dos catetos de medidas *b* e *c*, respectivamente. As figures , ’, ”, são semelhantes, pois todas as circunferências são semelhantes entre si.



Fonte: Os Autores.

Figura 6. Semicírculos $\mathcal{C}$,$\mathcal{C}$’, $\mathcal{C}$” sobre os lados do triângulo ABC

Segue do Teorema de Pólya que $S(\mathcal{C}) = S(\mathcal{C}') + S(\mathcal{C}")$.

Como $\frac{a}{2}$, $\frac{b}{2}$ e $\frac{c}{2}$, são raios dos semicírculos $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ e $\mathcal{C}"$, respectivamente. Logo, $S(\mathcal{C}) = \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2$,$S(\mathcal{C}') = \pi\left(\frac{b}{2}\right)^2$ $S(\mathcal{C}") = \pi\left(\frac{c}{2}\right)^2$.

Dessa forma, $\pi\left(\frac{a^2}{4}\right) = \pi\left(\frac{b^2}{4}\right) + \pi\left(\frac{c^2}{4}\right)$. Ou seja, $a^2 = b^2 + c^2$.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Conforme discorremos na análise deste trabalho, a demonstração de Pólya traz elementos de Euclides, o que ele intitula como analogia, mas mescla com sua originalidade, como podemos notar na observação de seu diagrama, por meio da especialização e generalização. Em suma, a ideia trabalhada consiste em usar o conceito de semelhança de figuras planas demonstrando uma generalização do teorema de Pitágoras.

REFERENCES

Anderson, Perry. *Linhagens do Estado Absolutista*. 3. ed. São Paulo: Brasiliense, 2004.

Bachir, M. F. A *Semelhança de Figuras no Ensino da Geometria Plana.* Vitória. 2017. 90f. Dissertação de Mestrado - Universidade Federal do Espírito Santo. Disponível em http://repositorio.ufes.br/handle/10/7548

Bastian, Irma Verri. *O Teorema de Pitágoras*. 2000. 229 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2000.

Gaspar, M. T. J. e Nobre, S. R. *O Teorema de Pitágoras na Antiguidade: Um olhar sobre a história da matemática Indiana*. Revista do professor de Matemática-RPM 87, 2015. Disponível em https://www.rpm.org.br/cdrpm/87/2.html, acesso em 25 de agosto de 2021

Guimarães, H. M.; Kilpatrick, J.: entrevista a George Pólya. *Quadrante*, *[S. l.]*, v. 19, n. 2, p. 103–119, 2010. Disponível em: https://quadrante.apm.pt/article/view/22850, acesso em: 25 ago. 2021.

Hofstetter, R; Schneuwly, B**.** *Saberes: um tema central para as profissões do ensino e da formação.* In: Hofstetter, R.; ValentE, W. R. (Org.). Saberes em (trans)formação: tema central da formação de professores. 1ª ed. São Paulo: Editora Livraria da Física (Coleção Contextos da Ciência), 2017. p.113-172.

Lima, E. L. - *Medida e Forma em Geometria.* 4ª ed. Coleção do Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2011.

Lima, E.L. *Meu Professor de Matemática e outras histórias*. 6 ed. Rio de Janeiro: SBM,2006.

Loomis, E.S. 1972. *The Pythagorean Proposition*. Washington D.C.: National council of teachers of mathematics.

Pinheiro, L. A. S.S. *A heurística de Pólya e a resolução de problemas de trigonometria.* Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Roraima. Boa Vista, 2017**.**

Pólya,G. *Induction and Analogy in Mathematics***.** Volume 1 Mathematics and Plausible Reasoning. Princeton UniversityPress, Princeton, New Jersey. 1954.

Reis, E.S. *Raízes históricas do ensino de cálculo diferencial e integral na escola politécnica do rio de janeiro nas últimas décadas do século XIX.* Mato Grosso do Sul, 2019. Tese (doutorado) – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Programa de PósGraduação em Educação Matemática. Orientador: Luiz Carlos Pais.

Robertson, E.; O´Connor J. *Mac Tutor History of Mathematics Archive* .School of Mathematics and StatisticsUniversityofSt Andrews, Scotland. In MacTutorHistoryofMathematics Archive - MacTutorHistoryofMathematics (st-andrews.ac.uk), 2015.

Soares, T.N.C. O papel da compreensão relacional na resolução de problemas matemáticos.Santa Cruz, RN, 2017**.**

****