ISSN: 2230-9926

Available online at http://www.journalijdr.com

IJDR

International Journal of Development Research
Vol. 11, Issue, 12, pp. 52435-52439, December, 2021
https://doi.org/10.37118/ijdr.23551.12.2021

RESEARCH ARTICLE OPEN ACCESS

POINTS ALGÉBRIQUES DE DEGRÉS AU PLUS 5 SUR LA COURBE C D'ÉQUATION AFFINE$y^2 = 3x(x^4 + 3)$

[1]EL Hadji SOW, [2]Pape Modou SARR and [3]Oumar SALL

[1]Laboratoire de Mathématiques et Applications (L.M.A.); [2]U.F.R. des Sciences et Technologies; [3]Université Assane SECK de Ziguinchor (SENEGAL)

ARTICLE INFO

Article History:
Received 03rd September, 2021
Received in revised form
17th October, 2021
Accepted 21st November, 2021
Published online 25th December, 2021

Key Words:
Planes curves, Degree of algebraic points, Rational points, Algebraic extensions, Jacobian.

Corresponding author: EL Hadji SOW

ABSTRACT

Dans ce travail, nous déterminons l'ensemble des points algébriques de degrés au plus 5 sur sur la courbe C d'équation affiney² $= 3x(x^4 + 3)$. L'énoncé obtenu étend un résultat de N. Bruin qui a décrit dans [1] l'ensemble des points -rationnels sur cettecourbe.

Citation: *EL Hadji SOW, Pape Modou SARR and Oumar SALL.* "Points algébriques de degrés au plus 5 sur la courbe c d'équation affiney²=3x(x^4+3)*", International Journal of Development Research*, 11, (12), 52435-52439.

INTRODUCTION

Soit C une courbe algébrique lisse de genre g définie sur un corps de nombres K.

L'ensemble des points algébriques sur C définis sur Kest noté $C(K)$et $\cup_{[K:\mathbb{Q}]\leq d} C(K)$ l'ensemble des points algébriques sur Cà coordonnées dans Kde degrés au plus dsur $\mathbb{Q}$.

Nous nous proposons d'étudier en détail les points algébriques de degrés au plus 5 sur $\mathbb{Q}$ sur la courbe C d'équation affine:

y² $= 3x(x^4 + 3)$

La courbe C est hyperelliptique de genre g= 2 et de rang nul d'après [1].

Notons $P = (0,0)$ et ∞ le point à l'infini. Dans [1]N. Bruin a donné une description des points rationnels.Cette description s'énonce comme suit :

Proposition: Les points $\mathbb{Q}$ − rationnels sur la courbe Csont donnés par

$C(\mathbb{Q}) = \{P, \infty\}$

Nous étendons ce résultat en donnant une description des points algébriques de degrés au plus 5 sur $\mathbb{Q}$. Nos outils essentiels sont:

- Le groupe de Mordell-Weil $J(\mathbb{Q})$des points rationnels sur C sur $\mathbb{Q}$ de la jacobienne de C, (voir [1]),
- Le théorème d'Abel Jacobi,(voir [2],)

➢ Des systèmes linéaires sur la courbe C.

Notre résultat principal s'énonce comme suit:

Théorème:

1) L'ensemble des points quadratiques sur Cest donné par S
$$S=\left\{\left(\alpha,\pm\sqrt{3\alpha(\alpha^4+3)}\right),\alpha\in\mathbb{Q}^*\right\}$$

2) L'ensemble des points cubiques sur Cest vide.

3) L'ensemble des points quartiques sur C est donné par $\mathcal{C}_0\cup\mathcal{C}_1$avec
$$\mathcal{C}_0=\left\{\left(x,\pm\sqrt{3x(x^4+3)}\right)\mid x\in\mathbb{Q},[\mathbb{Q}(x):\mathbb{Q}=2]\right\}$$
$$\mathcal{C}_1=\left\{\begin{matrix}(x,x(\alpha+\beta x))\mid\alpha,\beta\in\mathbb{Q}^*\ et\ x\ racine\ de\\ F(x)=3(x^4+3)-x(\alpha+\beta x)^2\end{matrix}\right\}$$

4) L'ensemble des points quintiques sur C est donné par $\mathcal{D}_0\cup\mathcal{D}_1$ avec
$$\mathcal{D}_0=\left\{\begin{matrix}(x,\alpha+\beta x+\gamma x^2)\mid\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{Q}^*\ et\ x\ racine\ de\\ G(x)=(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^2-3x(x^4+3)\end{matrix}\right\}$$
$$\mathcal{D}_1=\left\{\begin{matrix}(x,\alpha x+\beta x^2+\gamma x^3)\mid\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{Q}^*\ et\ x\ racine\ de\\ H(x)=x(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^2-3(x^4+3)\end{matrix}\right\}$$

RÉSULTATS AUXILIAIRES

Pour un diviseur D sur C nous notons $\mathcal{L}(D)$ le $\overline{\mathbb{Q}}$-espace vectoriel des fonctions rationnelles Fsur C telles que $F=0$ ou $div(F)\geq -D$; $l(D)$désigne la $\overline{\mathbb{Q}}$-dimensionde $\mathcal{L}(D)$. On montre dans [1] que le groupe de Mordell-Weil de la jacobienne$J(\mathbb{Q})$de Cest isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Soient$x\ et\ y$ les fonctions rationnelles définies sur$C$ par :

$$x(X,Y,Z)=\frac{X}{Z}\ et\ y(X,Y,Z)=\frac{Y}{Z}$$

L'équation projective de la courbe C est:

$$C:Y^2Z^3=3X(X^4+3Z^4)$$

On désigne par$J$ la jacobienne de Cet par$j(P)$ la classe notée$[P-\infty]$ de $P-\infty$, c'est à dire que $j$est le plongement jacobien$C\to J(\mathbb{Q})$.
Soit $\theta=e^{i\frac{\pi}{2}}$dans $\mathbb{C}$. Posons $B_k=\left(\sqrt[4]{3}\theta^{2k+1},0\right)$ pour $k=\{0,1,2,3\}$.

Désignons par$C'.C$ le cycle d'intersection d'une courbe algébriqueC' définie sur $\mathbb{Q}$et C.

Lemme 1 :

- $div(x)=2P-2\infty$
- $div(y)=P+B_0+B_1+B_2+B_3-5\infty$

Preuve

Il s'agit d'un calcul sans difficulté du type$div(x-a)=(X-aZ=0).C-(Z=0).C$

Par exemple, on a $div(x)=div\left(\frac{X}{Z}\right)=(X=0).C-(Z=0).C$.

On a $(X=0).C=2P-3\infty$ et $(Z=0).C=5\infty$, d'où $div(x)=2P-2\infty$.

Conséquence du lemme 1 : $2j(P)=0$.

Lemme 2:

- $\mathcal{L}(\infty)=\langle 1\rangle$
- $\mathcal{L}(2\infty)=\langle 1,\ x\rangle=\mathcal{L}(3\infty)$
- $\mathcal{L}(4\infty)=\langle 1,\ x,\ x^2\rangle$
- $\mathcal{L}(5\infty)=\langle 1,\ x,\ x^2,\ y\rangle$
- $\mathcal{L}(6\infty)=\langle 1,\ x,\ x^2,\ y,\ x^3\rangle$

Preuve.Résulte du lemme 1

Lemme 3: $J(\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \langle 0, [(0,0) - \infty] \rangle = \{a[P - \infty],\ a \in \{0,1\}\}$
Preuve. (voir [1])

Démonstration du théorème

1. Points quadratiques sur C

L'ensemble des points quadratiques sur Cest donné par Savec

$$S = \left\{\left(\alpha, \pm\sqrt{3\alpha(\alpha^4 + 3)}\right), \alpha \in \mathbb{Q}^*\right\}$$

Preuve

Soit$R \in C(\overline{\mathbb{Q}})$ avec$[\mathbb{Q}(R): \mathbb{Q} = 2]$. Notons R_1 et R_2 les conjugués de Galois de R. Travaillons avec$t = [R_1 + R_2 - 2\infty] \in J(\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, d'où

$t = [R_1 + R_2 - 2\infty] = aj(P) = -aj(P)$; $0 \le a \le 1$ $(*)$.

On remarque que$R \notin \{\infty,\ P\}$. Selon la valeur de a, on a les cas suivants :

Cas $a = 0$

La relation $(*)$ devient $[R_1 + R_2 - 2\infty]$.Le théorème d'Abel Jacobi entraine l'existence d'une fonction rationnelle F sur $\mathbb{Q}$ telle que

$div(F) = R_1 + R_2 - 2\infty$

Donc $F \in \mathcal{L}(2\infty)$, d'où$F(x) = a_1 + a_2x$ $avec$ $a_2 \neq 0$.Aux pointsR_i, on a $a_1 + a_2x = 0$ donc $x = -\frac{a_1}{a_2} = \alpha$. En remplaçant$x$ par α dans la relation$y^2 = 3x(x^4 + 3)$, on a:$y^2 = 3\alpha(\alpha^4 + 3)$

et par suite on a:

$y = \pm\sqrt{3\alpha(\alpha^4 + 3)}$

On a ainsi une famille de points quadratiques

$$S = \left\{\left(\alpha, \pm\sqrt{3\alpha(\alpha^4 + 3)}\right), \alpha \in \mathbb{Q}^*\right\}$$

Cas $a = 1$

La relation $(*)$ devient $[R_1 + R_2 + P - 3\infty] = j(P) = -j(P)$.Le théorème d'Abel Jacobi entraine l'existence d'une fonction rationnelle F sur $\mathbb{Q}$ telle que $div(F) = R_1 + R_2 + P - 3\infty$.

Donc $F \in \mathcal{L}(3\infty)$et comme $\mathcal{L}(3\infty) = \mathcal{L}(2\infty)$ un des $R_i$devrait être égal à ∞; ce qui est absurde.

Conclusion: L'ensemble des points quadratiques sur$C$ est donné par

$$S = \left\{\left(\alpha, \pm\sqrt{3\alpha(\alpha^4 + 3)}\right), \alpha \in \mathbb{Q}^*\right\}$$

2. Points cubiques sur C

L'ensemble des points cubiques sur Cest vide.

Preuve

Soit $R \in C(\overline{\mathbb{Q}})$ avec$[\mathbb{Q}(R): \mathbb{Q} = 3]$. Notons R_1, R_2, R_3 les conjugués de Galois de R. Travaillons avec $t = [R_1 + R_2 + R_3 - 3\infty] \in J(\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, d'où

$t = [R_1 + R_2 + R_3 - 3\infty] = aj(P) = -aj(P)$; $0 \le a \le 1$ $(**)$.

On remarque que $R \notin \{\infty,\ P\}$. Selon la valeur de a, on a les cas suivants :

Cas $a = 0$

La relation $(**)$ devient $R_1 + R_2 + R_3 - 3\infty = 0$.Le théorème d'Abel Jacobi entraine l'existence d'une fonction rationnelle F sur $\mathbb{Q}$ telle que $div(F) = R_1 + R_2 + R_3 - 3\infty$.

Donc $F \in \mathcal{L}(3\infty)$et comme $\mathcal{L}(3\infty) = \mathcal{L}(2\infty)$,un des $R_i$devrait être égal à ∞ ; ce qui est absurde

Cas $a = 1$

La relation $(**)$ devient $[R_1 + R_2 + R_3 - 3\infty] = j(P) = -j(P)$.Le théorème d'Abel Jacobi entraine l'existence d'une fonction rationnelle F sur $\mathbb{Q}$ telle que
$div(F) = R_1 + R_2 + R_3 + P - 4\infty$.

Donc $F \in \mathcal{L}(4\infty)$d'où $F(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2$ $avec$ $a_3 \neq 0$.

Au point$P$, on a $F(P) = 0$ donc $a_1 = 0$ d'où $F(x) = x(a_2 + a_3x)$. Aux points R_i, on doit avoir $x(a_2 + a_3x) = 0$, donc $x \in \mathbb{Q}$ et par conséquent les R_i devraient être de degré ≤ 2.

Conclusion: L'ensemble des points cubiques sur C est vide.

3. Points quartiques sur C

L'ensemble des points quartiques sur C est donné par $\mathcal{C}_0 \cup \mathcal{C}_1$avec

$$\mathcal{C}_0 = \left\{\left(x, \pm\sqrt{3\mathrm{x}(x^4+3)}\right) \mid x \in \mathbb{Q}, [\mathbb{Q}(x): \mathbb{Q} = 2]\right\}$$

$$\mathcal{C}_1 = \left\{\begin{matrix}(x, x(\alpha + \beta x)) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{Q}^* \; et \; x \; racine \; de \\ F(x) = 3(x^4+3) - x(\alpha+\beta x)^2\end{matrix}\right\}$$

Preuve

Soit $R \in C(\overline{\mathbb{Q}})$ avec$[\mathbb{Q}(R): \mathbb{Q}] = 4$. Notons R_1, R_2, R_3, R_4 les conjugués de Galois de R. Travaillons avec $t = [R_1 + R_2 + R_3 + R_4 - 4\infty] \in \mathrm{J}(\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, d'où

$t = [R_1 + R_2 + R_3 + R_4 - 4\infty] = aj(P) = -aj(P)$; $0 \leq a \leq 2$ $(***)$.

On remarque que $R \notin \{\infty, P\}$. Selon la valeur de a, on a les cas suivants :

Cas $a = 0$

La relation $(***)$ devient $R_1 + R_2 + R_3 + R_4 - 4\infty = 0$.Le théorème d'Abel Jacobi entraine l'existence d'une fonction rationnelle F sur $\mathbb{Q}$ telle que

$div(F) = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 - 4\infty$

Donc $F \in \mathcal{L}(4\infty)$. Donc $F \in \mathcal{L}(4\infty)$d'où $F(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2$ $avec$ $a_3 \neq 0$.

Aux points R_i, on a $a_1 + a_2x + a_3x^2 = 0$. La relation $y^2 = 3\mathrm{x}(x^4 + 3)$donne $y = \pm\sqrt{3\mathrm{x}(x^4+3)}$.

On obtient une famille de point quartiques

$$\mathcal{C}_0 = \left\{\left(x, \pm\sqrt{3\mathrm{x}(x^4+3)}\right) \mid x \in \mathbb{Q} , [\mathbb{Q}(x): \mathbb{Q} = 2]\right\}$$

Cas $a = 1$

La relation $(***)$ devient $[R_1 + R_2 + R_3 + R_4 - 4\infty] = j(P) = -j(P)$.Le théorème d'Abel Jacobi entraine l'existence d'une fonction rationnelle F sur $\mathbb{Q}$ telle que

$div(F) = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + P - 5\infty$.

Donc $F \in \mathcal{L}(5\infty)$d'où$F(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4y$ $avec$ $a_4 \neq 0$.Au point$P$, on a $F(P) = 0$ donc $a_1 = 0$ d'où $F(x) = x(a_2 + a_3x) + a_4y$. Aux points R_i, on a $x(a_2 + a_3x) + a_4y = 0$, d'où

$y = -\frac{a_2}{a_4}x - \frac{a_3}{a_4}x^2 = -\frac{a_3}{a_4}x\left(x + \frac{a_2}{a_3}\right)$. On voit que y est de la forme $y = \alpha x(x + \beta)$ avec α et $\beta \in \mathbb{Q}^*$; et par suite on a $y^2 = 3x(x^4 + 3) \Leftrightarrow$ $3x(x^4 + 3) - \left(\alpha x(x + \beta)\right)^2 = 0$

$$x\left(3(x^4+3) - x\left(\alpha(x+\beta)\right)^2\right) = 0$$

On doit avoir $x \neq 0$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}^*$, on obtient une famille de points quartiques

$$\mathcal{C}_1 = \left\{\begin{matrix}(x, x(\alpha + \beta x)) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{Q}^* \; et \; x \; racine \; de \\ F(x) = 3(x^4+3) - x(\alpha+\beta x)^2\end{matrix}\right\}$$

Conclusion: L'ensemble des points quartiques sur C est donné par $\mathcal{C}_0 \cup \mathcal{C}_1$.

Points quintiquessur C

L'ensemble des points quintiques sur C est donné par $\mathcal{D}_0 \cup \mathcal{D}_1$ avec

$$\mathcal{D}_0 = \left\{ \begin{matrix} (x, \alpha + \beta x + \gamma x^2) \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}^* \; et \; x \; racine \; de \\ G(x) = (\alpha + \beta x + \gamma x^2)^2 - 3x(x^4 + 3) \end{matrix} \right\}$$

$$\mathcal{D}_1 = \left\{ \begin{matrix} (x, \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3) \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}^* \; et \; x \; racine \; de \\ H(x) = x(\alpha + \beta x + \gamma x^2)^2 - 3(x^4 + 3) \end{matrix} \right\}$$

Preuve

Soit $R \in C(\overline{\mathbb{Q}})$ avec$[\mathbb{Q}(R):\mathbb{Q}] = 5$. Notons R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 les conjugués de Galois de R. Travaillons avec $t = [R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5 - 5\infty] \in J(\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, d'où

$t = [R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5 - 5\infty] = aj(P) = -aj(P)$; $0 \leq a \leq 1$ (∗∗∗∗).

On remarque que $R \notin \{\infty, P\}$. Selon la valeur de a, on a les cas suivants :

Cas $a = 0$

La relation (∗∗∗∗) devient $[R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5 - 5\infty] = 0$.Le théorème d'Abel Jacobi entraine l'existence d'une fonction rationnelle F sur $\mathbb{Q}$ telle que

$div(F) = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5 - 5\infty$.

Donc $F \in \mathcal{L}(5\infty)$d'où

$F(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 y \; avec \; a_4 \neq 0$.Aux points R_i, on a $a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 y = 0$, d'où

On voit que y est de la forme $y = \alpha + \beta x + \gamma x^2$ avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}^*$; et par suite on a

$y^2 = 3x(x^4 + 3) \Leftrightarrow (\alpha + \beta x + \gamma x^2)^2 = 3x(x^4 + 3)$.

$(\alpha + \beta x + \gamma x^2)^2 - 3x(x^4 + 3) = 0$

On obtient une famille de points quintiques

$$\mathcal{D}_0 = \left\{ \begin{matrix} (x, \alpha + \beta x + \gamma x^2) \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}^* \; et \; x \; racine \; de \\ G(x) = (\alpha + \beta x + \gamma x^2)^2 - 3x(x^4 + 3) \end{matrix} \right\}$$

Cas $a = 1$

La relation (∗∗∗∗) devient $[R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5 - 5\infty] = j(P) = -j(P)$.Le théorème d'Abel Jacobi entraine l'existence d'une fonction rationnelle F sur $\mathbb{Q}$ telle que

$div(F) = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5 + P - 6\infty$

Donc $F \in \mathcal{L}(6\infty)$d'où

$F(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 y + a_5 x^3 \; avec \; a_5 \neq 0$.

Au point P, on a $F(P) = 0$ donc $a_1 = 0$, d'où $F(x) = a_2 x + a_3 x^2 + a_4 y + a_5 x^3$.Ensuite aux points R_i, on a $a_2 x + a_3 x^2 + a_4 y + a_5 x^3 = 0$. Donc on voit que y est de la forme $y = \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3$ avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}^*$; et par suite on a $y^2 = 3x(x^4 + 3) \Leftrightarrow (\alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3)^2 = 3x(x^4 + 3) \Leftrightarrow$

$x(\alpha + \beta x + \gamma x^2)^2 - 3(x^4 + 3) = 0$

On doit avoir $x \neq 0 \; et \; \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}^*$, on obtient une famille de points quintiques

$$\mathcal{D}_1 = \left\{ \begin{matrix} (x, \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3) \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}^* \; et \; x \; racine \; de \\ H(x) = x(\alpha + \beta x + \gamma x^2)^2 - 3(x^4 + 3) \end{matrix} \right\}$$

RÉFÉRENCES

[1] N. Bruin, On powers as sums of two cubes, International Algorithmic Number Theory Symposium. Springer, Berlin, Heidelberg, 2000.
[2] P. A. Griffiths, Introduction to algebraiccurves, Translations of mathematical Monographs volume 76. American Mathematical Society, Providence (1989).

****