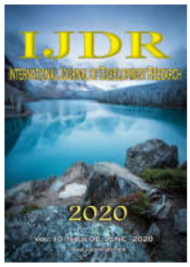
Available online at http://www.journalijdr.com

IJDR

International Journal of Development Research
Vol. 10, Issue, 06, pp. 36323-36333, June, 2020
https://doi.org/10.37118/ijdr.18881.06.2020

ISSN: 2230-9926



RESEARCH ARTICLE OPEN ACCESS

UMA EXPERIÊNCIA COM POLINÔMIOS GERADORES NO ENSINO MÉDIO

Enoque da Silva Reis, Gabriel de Freitas Pinheiro, Irene Magalhães Craveiro and Marcia A. Garcia Teixeira

[1]Doutor e mestre em Educação Matemática pela Universidade Federal do Mato Grosso do Sul. Especialista em Estatística pela Universidade Federal de Lavras MG. Graduado em Matemática Licenciatura Plena com Ênfase em Ciências da Computação pela Universidade para o Desenvolvimento do Estado e da Região do Pantanal. Líder do Grupo de Estudo e Pesquisa em História da Educação Matemática Escolar GEPHEME. Professor Adjunto da Universidade Federal de Rondônia; [2]Graduado em Licenciatura em Matemática pela Universidade Federal da Grande Dourados (UFGD) – Dourados; [3]Possui graduação em Matemática pela Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, mestrado em Ciências Matemática pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho e doutorado em Matemática pela Universidade Estadual de Campinas. Professora Adjunta na Universidade Federal da Grande Dourados – UFGD; [4]Possui graduação em Matemática pela Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. Especialização em Ensino da Matemática pela Universidade Federal da Grande Dourados. Mestrado em Matemática [PROFMAT] pela Universidade Federal da Grande Dourados. Professora da Rede Estadual de Mato Grosso do Sul

ARTICLE INFO

Article History:
Received 20th March, 2020
Received in revised form
03rd April, 2020
Accepted 11th May, 2020
Published online 25th June, 2020

Key words:
Ensino Médio,
Análise Combinatória,
PolinômioGerador.

Corresponding author:
Dr. Enoque da Silva Reis

ABSTRACT

Este trabalho trata de um relato de experiência, ao qual visa trazer informações sobre uma atividade realizada no Ensino Médio na aula de Matemática sobre polinômios geradores. Assim, buscou-se reunir informações com o propósito de responder à seguinte questão: De que forma o estudo sobre Funções Geradoras no Ensino Médio pode proporcionar diferentes estratégias na resolução de problemas que envolvem Análise Combinatória? Elaboramos e aplicamos atividades, a fim de obter uma resposta para a questão que norteou este trabalho. Para isso, consideramos como principal objetivo explorar diferentes soluções para um problema de contagem, sendo uma dessas as funções geradoras e, assim, mostrar as potencialidades dessa ferramenta. Como referencial teórico fizemos usos de definições, conceitos e teoremas de Análise Combinatória e também de Funções Geradoras. Como resultado observamos que mesmo o conteúdo de Funções Geradoras ser explicitado somente no ensino superior os alunos do Ensino Médio fizeram uso do mesmo em suas estratégias de resolução.

Citation: ***Dr. Enoque da Silva Reis et al.*** "Uma experiência com polinômios geradores no ensino médio", *International Journal of Development Research*, 10, (06), 36323-36333.

INTRODUCTION

Ao observarmos o ensino voltado a Educação Básica nos documentos oficiais brasileiros, como os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN´S) o Plano Nacional do Livro Didático (PNLD) a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) com olhares voltado ao conteúdo de Análise Combinatória observa-se, em geral, trata-se de problemas de enumeração (listagem de todos os subconjuntos de elementos que satisfazem as condições postas) e de contagem (determinação do número total de soluções, sem necessariamente listar todas). Além da limitação em termos de problemas combinatórios tratados, restringem-se, também, os tipos de situações a determinados níveis de ensino, apesar de recomendações em contrário de documentos oficiais como os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997). Em relação à Análise Combinatória, na Base Nacional Comum Curricular - BNCC é proposto a progressão ano a ano, a partir da "compreensão e utilização de novas ferramentas e também na complexidade das situações-problema propostas, cuja resolução exige a execução de mais etapas ou noções de unidades temáticas" (BRASIL, 2018, p.277). Dessa forma, os problemas envolvendo contagem iniciariam de situações em que fosse permitido descrever todos os casos possíveis (durante o ensino fundamental) para que posteriormente fossem resolvidos "[...] por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas [...]" (BRASIL, 2018, p.548). Indicando assim uma ideia de construção do raciocínio combinatório. Ao se estudar a Combinatória no Ensino Médio, outros problemas são tratados, com casos nos quais elementos podem, ou não, ser repetidos. Nesse nível de ensino, geralmente os problemas abordados são: arranjos (a partir de um conjunto maior são escolhidos elementos cuja ordenação gera possibilidades distintas), combinações (que se assemelham aos arranjos em termos de escolha de elementos, com a diferença de que a ordem dos elementos não gera possibilidades distintas) e permutações (todos os elementos do conjunto são utilizados, apenas a ordem de apresentação dos mesmos varia) (BORBA, 2015). Assim, vemos que o estudo de Análise combinatória, principalmente no Ensino Médio, foca–se em abordar em sua totalidade técnicas de contagem. Onde problemas de natureza combinatória são resolvidos, muitas vezes, apenas por meio de fórmulas. Outro ponto é que esses problemas requerem o raciocínio combinatório, e esse pouco tem sido desenvolvido ao longo dos anos escolares. Julianelli *et al.* (2009), discutindo sobre o objeto matemático Análise Combinatória, afirmam que o modelo de ensino deste tema tem seguido enfoques didáticos voltados integralmente ou quase integralmente para os aspectos estritamente matemáticos, desvinculados de suas conexões com a realidade natural ou social. Conforme os autores, é comum encontrar professores na educação básica que limitam suas aulas à utilização de fórmulas apenas para estabelecer a diferença entre os agrupamentos Arranjos Simples e Combinação Simples, a título de comparação. Dessa forma, o intuito de trabalhar com as funções geradoras está no fato de poder proporcionar a alunos e professores uma maneira diferente de resolver problemas de contagem, onde principalmente por meio de polinômios e operações entre eles, os alunos conseguem obter as soluções de problemas combinatórios mais sofisticados. Com isso, acreditamos ser possível a criação de um ambiente de aprendizagem mais significativo, uma vez que o tema funções geradoras faz conexão com outros conteúdos da matemática (como polinômios), desenvolvendo pouco a pouco nos alunos o pensamento combinatório.

Cabe neste momento, destacar que é possível que alguns professores ao observar tal proposta de conteúdo tenha a impressão que ela possa "complicar a solução", pois pode-se dar as soluções dos problemas combinatórios de forma mais fácil e rápida usando os métodos tradicionais de contagem, porém, o que queremos nesse trabalho não é facilitar a resolução de problemas, mas fornecer um modo diferente de se contar. Outro ponto em destaque tem-se ao abordar as funções geradoras "não se trata de os alunos possuírem muitas e sofisticadas estratégias, mas sim de desenvolverem a iniciativa e a segurança para adaptá-las a diferentes contextos, usando-as adequadamente no momento oportuno" (PCN, 1998, p.40).
Destacamos que para esse trabalho optou-se por uma abordagem qualitativa, pois o objetivo foi justamente observar a ação dos alunos frente às funções geradoras como uma ferramenta para a resolução de problemas de contagem. Diante disso, a partir dos elementos coletados em nossos movimentos de revisão bibliográfica em conjunto com o estudo e escrita do referencial teórico, desenvolveu-se o que aqui estamos chamando de proposta de atividade, cuja a intenção foi inserir o conceito de funções geradoras como aparato para resolver certos problemas, em particular problemas de contagem. Para isso, desenvolveu-se a proposta numa escola estadual no interior de Mato Grosso do Sul, contando com três turmas de ensino médio, num total de 88 alunos. O desenvolvimento está dividido nos seguintes tópicos: metodologia e análise e descrição da experiência que descrevemos a seguir.

METODOLOGIA

No desenvolvimento desse trabalho pode-se observar quatro fases distintas, são elas, fase de sondagem, em seguida introdução às funções geradoras, praticando e, por fim, a fase de desenvolvimento, a seguir descreveremos cada uma delas. Vale ressaltar neste momento que com essas fases trabalhamos pouco a pouco as técnicas de contagem, onde demos mais foco aos princípios aditivo e multiplicativo e à combinação simples, para posteriormente inserir o conceito de funções geradoras, e por fim, analisar se os estudantes já possuíam maturidade para resolverem problemas que utilizem as técnicas aqui trabalhadas. Fase 1 (Sondagem): o objetivo dessa fase é verificar o que os alunos recordam acerca dos conceitos de Análise Combinatória já abordados em outras séries. Para isso selecionamos três tarefas na qual o método de resolução foi livre, a fim de verificarmos como está o processo de desenvolvimento do raciocínio combinatório e quais são as técnicas que os alunos utilizam para a resolução, dessa forma termos uma maior clareza sobre como vem sendo desenvolvido o conteúdo de análise combinatória no ensino básico. Vale ressaltar que nessa fase é interessante que os alunos desenvolvam os problemas individualmente, porém, pode-se também ser realizado em duplas. Assim, seria entregue a cada aluno uma folha com os problemas para eles resolverem, e durante esse período o professor assumiria papel de observador, não deve intervir e nem fornecer caminhos para a resolução, nossa ideia com isso é testar o que os alunos recordam sobre o assunto Análise Combinatória e dar autonomia a eles para resolverem o problema da maneira que conseguirem. Abaixo se encontram os problemas a serem desenvolvidas com a turma:

Problema 1: Suponha que José foi à livraria e ficou em dúvida entre três livros distintos e duas revistas distintas. Sabendo que ele tenha dinheiro para comprar apenas uma das opções, diga de quantas formas ele pode escolher. Com esse problema buscamos desenvolver com os alunos o conceito do princípio aditivo, embora imaginemos que a maioria resolverá por meio de enumeração ou por raciocínio direto, pois, quando paramos para analisar vemos que José só pode levar uma das opções, logo, ele só pode fazer isso de 5 formas diferentes. A ideia do princípio aditivo é somar a quantidade de elementos de cada conjunto, sendo que a ordem de escolha não interfere no resultado do problema. No nosso caso, temos o conjunto dos livros - composto por 3 elementos - e o conjunto das revistas - composto por dois elementos. Vemos que esses conjuntos são disjuntos, logo, a resposta para o problema se dá pela soma de 3 com 2, onde obtemos 5. Assim, José pode escolher de 5 maneiras diferentes.

Problema 2: Em relação ao problema anterior, suponha que agora José tenha dinheiro para comprar apenas um livro e uma revista. De quantas formas ele pode escolher? Esse problema visa desenvolver a ideia do princípio multiplicativo, porém, pode ser resolvido também por meio de enumeração. Para isso, chamemos de L_1, L_2, L_3 os livros 1, 2 e 3, e de R_1, R_2 as revistas 1 e 2. Vale ressaltar que a ordem com que nomeamos os livros e revistas não interfere em nada. Vamos agora enumerar todas as possibilidades: L_1 e R_1; L_1 e R_2;L_2 e R_1; L_2 e R_2; L_3 e R_1; L_3 e R_2. Contando todas as possibilidades obtemos um total de 6 maneiras que José pode escolher entre levar uma revista e um livro. Porém, temos uma forma ainda mais simples de resolvermos esse problema, sabemos que o número de elementos do conjunto dos livros é 3 e das revistas é 2, e ambos os conjuntos são disjuntos, então, o princípio multiplicativo garante que a resposta do problema é dado pelo produto3x2, que no caso é 6.

Problema 3: De quantas maneiras pode-se retirar 2 bolas de uma caixa de um total de 5 bolas? Esse é um problema clássico de combinação simples, porém, pode ser resolvido por enumeração, assim, vamos nomear as 5 bolas por x_1, x_2, x_3, x_4 e x_5. Abaixo seguem as combinações que podem ser feitas: x_1 ex_2; x_1 e x_3; x_1e x_4; x_1 e x_5; x_2 e x_3;x_2 e x_4; x_2e x_5; x_3 e x_4; x_3 ex_5; x_4 ex_5. Temos assim um total de 10 maneiras para se escolher duas bolas. Vimos que foi um processo fácil de enumeração, porém pode ser resolvido ainda mais facilmente se o professor quiser construir com os alunos o conceito de combinação, ele pode pedir para que a turma encontre uma fórmula para a combinação simples, deixando sempre bem claro que na combinação a ordem dos elementos não importa. Assim, basta o aluno perceber que temos inicialmente 5 escolhas para se retirar uma bola, já para a retirada da segunda bola nos sobrou apenas 4 escolhas diferentes a se fazer, logo, pelo princípio multiplicativo temos $5 \times 4 = 20$ maneiras de escolher duas bolas, porém, como a ordem de escolha das bolas não importa, basta dividir por 2! que é o número de permutações que se pode ser feito com duas bolas, assim, obtemos $\frac{20}{2!} = 10$ maneiras de se escolher duas bolas. Para chegar a uma fórmula explícita, o professor pode passar aos alunos o conceito e a fórmula do arranjo simples, dada por $A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$, onde os alunos podem perceber que o resultado foi obtido dividindo o arranjo de 5 elementos tomados 2 a 2, dividido por 2!, logo, $\frac{A_{5,2}}{2!} = 10$.

O interessante de trabalhar a generalização do conceito de combinação é que nesse processo, vários outros conceitos como o princípio multiplicativo e o arranjo simples vão se integrando, mostrando assim aos alunos que a matemática é construtiva. Uma observação a ser feita para essa fase é que o professor deve saber alternar entre o papel de observador e orientador, por exemplo, nos problemas 1 e 2 buscamos desenvolver a autonomia do aluno na resolução do problema, então o professor deve interferir o mínimo possível, já no problema 3 o professor pode fornecer alguma ajuda, como por exemplo, explicando de que forma a fórmula da combinação simples deriva do arranjo simples e essas do princípio multiplicativo. Outro ponto a ressaltar é que nas questões 1 e 2, o professor pode trabalhar com os alunos a questão do "ou" e do "e" na matemática, deixando bem claro que esses termos são conectivos lógicos que diferem, e muito, entre si. O termo na matemática foi grifado pois deve-se deixar bem claro aos alunos que a linguagem matemática se difere da língua portuguesa em vários casos, e que dependendo do contexto os significados são bem diferentes.

Assim, com esses três problemas supracitados, pretendeu-se verificar o que os alunos recordam acerca do tema Análise Combinatória. Ressaltamos que colocamos nos problemas uma quantidade pequena de dados, então a resolução por enumeração é possível em todos os casos, porém, o professor pode focar também em outros problemas com os alunos onde a enumeração seria um processo muito trabalhoso, e que recorrer às fórmulas seria uma alternativa que economizaria mais tempo. Após os alunos resolverem os problemas, finalizaríamos a primeira fase formalizando os temas nela desenvolvidos, definido assim os conceitos de princípio aditivo e multiplicativo e a combinação simples. Fase 2 (Introdução às funções geradoras/Polinômios geradores): Pensar essa fase foi meio complicado, pois queríamos desenvolver com os alunos o conceito de função geradora sem ser por meio de uma aula apenas expositiva, assim, decidimos desenvolver um problema e resolvê-lo por meio de funções geradoras. Vale ressaltar que as funções geradoras envolvem desenvolvimento em séries de potência, porém, como nosso público são alunos do ensino básico, trataremos as funções geradoras apenas de um ponto de vista polinomial, por meio de exemplos. Nossa intenção com essa fase é induzir o aluno a resolver um problema combinatório de modo algébrico e que isso sirva de subsídio para um desenvolvimento efetivo do processo de contagem por meio das funções geradoras. Deixamos como recomendação que essa fase seja realizada individualmente, onde seria entregue a cada aluno uma folha com o problema proposto, nossa intenção com isso é extrair com as perguntas o que cada aluno conseguiu compreender da resolução do problema envolvendo funções geradoras, assim, se fosse feito em grupo poderia ocorrer de apenas um aluno resolver e os outros ficarem sem compreender, logo, fazer de modo individual facilita ao professor esclarecer as dúvidas que cada aluno pode levantar em relação ao problema. Antes de desenvolvermos o problema, uma observação deve ser feita, estamos chamando de Polinômios geradores as funções geradoras que são modeladas como polinômios, pois, apenas essas são do nosso interesse. Além disso, acreditamos que esse nome terá maior proximidade com os alunos, afinal, polinômios é um tema a ser tratado no ensino médio. Dessa forma, segue abaixo o problema que servirá de motivação para desenvolvermos o tema funções geradora.

Problema 4: De quantas maneiras podemos somar três números de tal forma que o resultado seja 10, onde dois desses números podem assumir valor 1,2 ou 3 e o terceiro pode assumir valor 5, 6 ou 7? Observe a resolução e depois responda as questões. *Solução.* Chamemos esses números por x_1, x_2, x_3. Assim, esse problema se resume em encontrar as soluções positivas da equação $x_1 + x_2 + x_3 = 10$ sendo que $x_1, x_2 \in \{1,2,3\}$ e $x_3 \in \{5,6,7\}$. Assim, para resolver esse problema introduza os seguintes polinômios:

$$P_1(x) = x + x^2 + x^3; P_2(x) = x + x^2 + x^3; P_3(x) = x^5 + x^6 + x^7.$$

Fazendo o produto de P_1, P_2 e P_3 obtemos um novo polinômio dado por:

$$P(x) = x^{13} + 3x^{12} + 6x^{11} + 7x^{10} + 6x^9 + 3x^8 + x^7$$

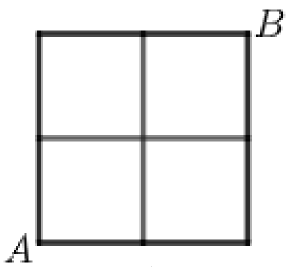
Assim, olhando para o polinômio obtido pelo produto dos outros três polinômios temos que a resposta para o nosso problema é 7, ou seja, existem 7 maneiras de somarmos três números, dadas suas restrições, e obter o resultado 10.O que os polinômios P_1, P_2, P_3 têm em relação com os dados do problema?. Com essa pergunta esperamos que os alunos consigam perceber que os polinômios P_1, P_2, P_3 foram construídos estrategicamente de modo que as potências de x em cada polinômio representassem as restrições de x_1, x_2 e x_3. Quanto à resposta obtida para o problema, de que forma podemos relacioná-la com o polinômio gerado pelo produto de P_1, P_2 e P_3?.

Nessa questão esperamos que os alunos percebam que quando fizemos o produto de P_1, P_2, P_3 estávamos relacionando os expoentes, que representam x_1, x_2 ex_3, por meio da soma, pois quando multiplicamos potências de mesma base, conserva-se a base e somam-se os expoentes, ou seja, estamos nada mais que contando de quantas formas era possível obter o resultado 10 dadas as restrições representadas pelos expoentes. Assim, o coeficiente de x^{10} nos fornece a resposta do problema, ou seja, podemos somar os três números, dentro das restrições, 7 vezes e iremos obter o resultado 10. Esse problema poderia ser resolvido por enumeração, mas o aluno levaria mais tempo para testar as 7 possibilidades. Observando o polinômio $P(x)$ poderíamos obter a resposta de $x_1 + x_2 + x_3 = 12$ dadas as mesmas restrições? Justifique. Nessa questão pretendemos que os alunos percebam o potencial da função geradora, pois no problema aqui abordado, o polinômio $P(x)$ fornece a resposta para qualquer equação do tipo $x_1 + x_2 + x_3 = m$, como $m \in \{7,8,9,10,11,12,13\}$, dadas as restrições iniciais de x_1, x_2 e x_3.

Ou seja, as funções geradoras servem como uma poderosa ferramenta para resolver problemas de contagem com restrições, sendo assim, elas são muitas vezes mais eficientes que as próprias técnicas de contagem. Alguma das técnicas de contagem trabalhada anteriormente serve para resolver esse problema? Se sim, diga qual e resolva o problema. Com essa alternativa esperamos que os alunos percebam que usar as outras técnicas torna-se algo mais difícil, pois há muitas restrições no problema, assim, o único processo mais familiar a eles seria resolver por enumeração, porém, se aumentasse o número de restrições isso poderia ser muito mais trabalhoso. Após os alunos responderem as questões seria feita a formalização sobre o tema funções geradoras, onde as definiríamos como polinômios geradores. Vale ressaltar que estamos tratando das funções geradoras que levam em consideração problemas de contagem cuja ordem dos elementos não importa. Escolhemos desenvolver um problema e resolvê-lo nessa fase, pois caso contrário, teríamos que abordar uma metodologia mais expositiva, assim, com as questões levantadas objetivou-se que os alunos criassem suas próprias ideias acerca das funções geradoras, que eles levantassem hipóteses e as respondessem, com isso acreditamos que estaríamos desenvolvendo o poder de análise nos alunos, além de estar trabalhando o raciocínio combinatório, pois pensar sobre um problema, extrair dados e levantar hipóteses é um dos passos ao desenvolvimento de uma melhor compreensão da Análise Combinatória. Além do mais, de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais, As habilidades de descrever e analisar um grande número de dados, realizar inferências e fazer predições com base numa amostra de população, aplicada as ideias de probabilidade e combinatória a fenômenos naturais e do cotidiano são aplicações da Matemática em questões do mundo real que tiveram um crescimento muito grande e se tornaram bastante complexas. Técnicas e raciocínios estatístico e probabilístico são, sem dúvida, instrumentos tanto das Ciências da Natureza quanto das Ciências Humanas. Isto mostra como será importante uma cuidadosa abordagem dos conteúdos de contagem, estatística e probabilidade no Ensino Médio, ampliando a interface entre o aprendizado da Matemática e das demais ciências e áreas(BRASIL, 1999, p. 257). Sendo assim, no mundo de inúmeras transformações sociais e econômicas, o estudante precisa adquirir competências cada vez mais abrangentes e efetivas. Neste sentido, desenvolver habilidades de resolver problemas é, sem dúvida, um requisito relevante para a aquisição dessas competências. (SILVA, 2017, p. 40). Fase 3 (Praticando): Nessa fase formaríamos grupos com no máximo três alunos para resolverem entre eles um problema de contagem envolvendo o conceito de funções geradoras, para isso entregaríamos uma folha para cada integrante do grupo contendo o problema. Deixamos para essa fase a escolha da metodologia a critério do professor, porém damos como sugestão a Metodologia de Resolução de Problemas desenvolvida por Lourdes de la Rosa Onuchic e Norma Suelly Gomes Allevato. É interessante que durante a fase de resolução o professor crie um ambiente de aprendizagem com os alunos que os motivem a querer resolver o problema, pois nesse período muitos alunos podem começar a se desinteressar, por considerar que o método das funções geradoras possa complicar a solução. Assim, buscamos com essa fase testar como se deu a apreensão do conceito das funções geradoras pelos alunos. Vale ressaltar, que, seria interessante que o desenvolvimento das fases fosse feito de modo contínuo, a fim de que, a aprendizagem do conceito dos polinômios geradores se desse de forma construtiva. Além disso, buscamos classificar qual método os alunos estão utilizando para resolverem problemas combinatórios. Sendo assim, seguem abaixo os problemas que foram desenvolvidos e as formas que classificamos os tipos de resoluções dos problemas.

Problema 5 (AUTOR): Rafael desenvolveu uma formiga robô que aceita apenas dois comandos, para cima (C) e para a direita (D). Sendo assim, quantos trajetos diferentes essa formiga realizaria em um tabuleiro 2x2 (ver figura abaixo) partindo do ponto A até o ponto B?

Figura 1. Grade 2×2

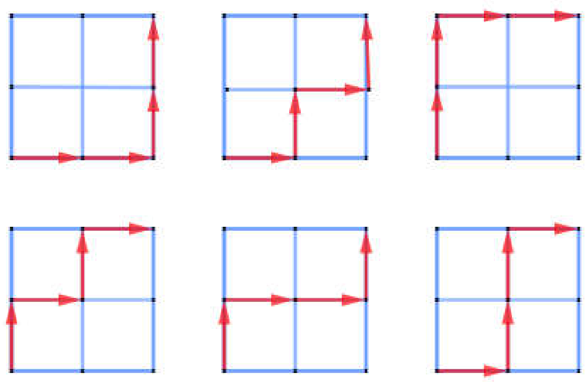


Fonte: Autor.

Tipos de soluções: *Geométrica:* enumerando todas as possibilidades por meio de desenhos.

Por meio de combinação simples: Qualquer que seja o percurso escolhido de A até B, a formiga deverá fazer dois caminhos da esquerda para a direita e dois para cima. Além disso, a formiga deve escolher: vou para cima ou para a direita? Para ir de A até B, com as restrições tomadas, temos um total de $2 + 2 = 4$ caminhos para contornar. Assim, do conjunto de percursos que envolvem 4 caminhos, a formiga pode selecionar dois desses para ser o percurso para a direita ou para cima. Logo, há $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4.3.2!}{2!2!} = 6$ percursos distintos partindo de A até B.

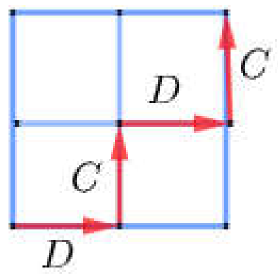
Figura 2. Trajetos na grade 2x2



Fonte: Autor

Por meio de permutação com repetição: Escolher um caminho possível, indicando-o com as letras C e D, como no exemplo abaixo:

Figura 3. Caminho 1



Fonte: Autor.

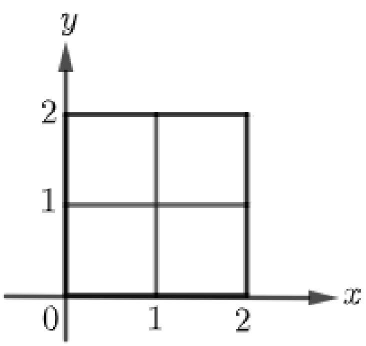
Construindo assim uma sequência com essas letras (D, C, D, C), e após, contar quantas permutações com repetição são possíveis de serem feitas. Como as letras C e D repetem duas vezes, temos que o número de permutações possíveis de se fazer é:

$$P_4(2,2) = \frac{4!}{2!\,2!} = \frac{4.3.2.1}{2.1.2.1} = \frac{24}{4} = 6.$$

Logo, a formiga pode percorrer um total de 6 trajetos distintos partindo do ponto A até B.

Algébrico: Pense na grade 2×2 como a planta de uma cidade onde cada vértice dessa representa uma esquina. Na imagem abaixo, consideremos $x = 2$ e $y = 2$.

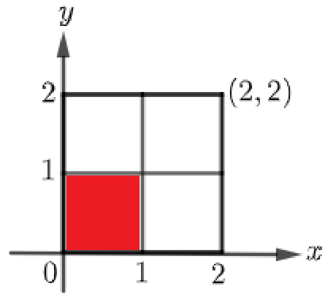
Figura 4. Grade 2×2 no plano xy



Fonte: Autor.

Vamos denotar por v_0, v_1, v_2 as ruas verticais (de norte a sul), e mais, uma quadra será representada por $\frac{1}{4}$ do quadrado maior, como mostra o exemplo abaixo

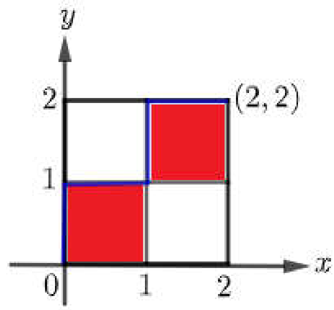
Figura 5. Bloco de uma grade 2×2



Fonte: Autor.

Pensando um pouco, vemos que um caminho que liga os pontos $A = (0,0)$ a $B = (2,2)$ é completamente determinado pelo número de quadras ao longo do caminho em cada uma das ruas verticais. Por exemplo, o trajeto da imagem acima, representado pelo caminho em azul, ficou completamente determinado pelas duas quadras formadas (representados pelos quadrados vermelhos).

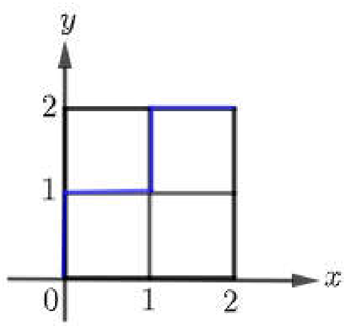
Figura 6. Caminhos determinados por dois blocos



Fonte: Autor.

Para $0 \leq i \leq 2$, seja y_i o número de quadras percorridas na rua v_i. Então, y_i são inteiros não-negativos e $y_0 + y_1 + y_2 = 2$ $(*)$. Portanto, o número de caminhos ligando o ponto A ao ponto B é igual ao número de ternas ordenadas (y_0, y_1, y_2) de inteiros não-negativos que satisfazem $(*)$. Por exemplo, considere o caminho abaixo pintado de azul:

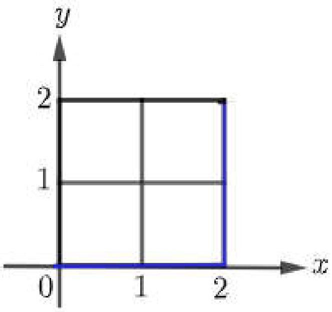
Figura 7. Caminho 2



Fonte: Autor.

Esse caminho corresponde à solução $(y_0, y_1, y_2) = (1,1,0)$ para a equação $y_0 + y_1 + y_2 = 2$. Vejamos outro exemplo.

Figura 8. Caminho 3



Fonte: Autor.

Na figura 8, temos que o caminho percorrido corresponde à terna $(0,0,2)$. Assim, considerando o raciocínio anterior, podemos resolver esse problema por meio de funções geradoras, para isso, basta observar que ele se resume a encontrar as soluções positivas da equação $y_0 + y_1 + y_2 = 2$,sendo que y_0, y_1, y_2 são inteiros não-negativos e $y_0, y_1, y_2 \in \{0,1,2\}$. Assim, modelando os polinômios geradores temos que $P_0(y) = y^0 + y^1 + y^2; P_1(y) = y^0 + y^1 + y^2; P_2(y) = y^0 + y^1 + y^2$, onde os expoentes de P_0, P_1, P_2 são as restrições das indeterminadas y_0, y_1, y_2 respectivamente.

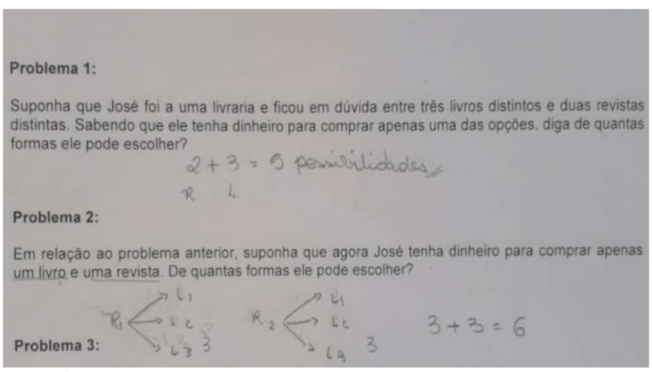
Como $P_0(y) = P_1(y) = P_2(y) = P(y) = 1 + y + y^2$, temos que o coeficiente de y^2 no desenvolvimento de $[P(y)]^3$ nos dá a resposta do nosso problema. Ou seja,

$$[P(y)]^3 = (1 + y + y^2)^3$$
$$= y^6 + 3y^5 + 6y^4 + 7y^3 + 6y^2 + 3y + 1.$$

Portanto, há 6 trajetos diferentes que a formiga pode percorrer partindo de A até B. Como sugestão, caso o professor pensar que o desenvolvimento de alguns polinômios possa ser muito trabalhoso, pode-se pensar em usar algum software ou aplicativo que faça esse cálculo, afinal, o que nos interessa mesmo é o raciocínio usado para a modelagem do problema.

Descrição e Análise da Experiência: Nessa seção trabalharemos com os dados obtidos da aplicação dos problemas desenvolvidos metodologia, numa escola do interior do Mato Grosso do Sul. Estes foram desenvolvidos em turmas de terceiro ano do Ensino Médio, nos períodos matutino e vespertino e foram divididos em três fases: sondagem, introdução às funções geradoras e praticando. A sondagem foi composta por 3 problemas, que foram adaptados, tendo como principal objetivo avaliar o conhecimento prévio dos alunos, sem interferência do professor.

Figura 9. Solução de dupla 1


Problema 1:

Suponha que José foi a uma livraria e ficou em dúvida entre três livros distintos e duas revistas distintas. Sabendo que ele tenha dinheiro para comprar apenas uma das opções, diga de quantas formas ele pode escolher?

2 + 3 = 5 possibilidades

Problema 2:

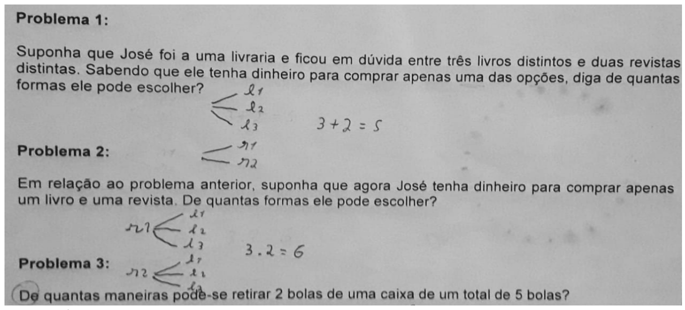
Em relação ao problema anterior, suponha que agora José tenha dinheiro para comprar apenas um livro e uma revista. De quantas formas ele pode escolher?

3 + 3 = 6

Problema 3:

Fonte: Autor.

Figura 10. Solução de dupla 2


Problema 1:

Suponha que José foi a uma livraria e ficou em dúvida entre três livros distintos e duas revistas distintas. Sabendo que ele tenha dinheiro para comprar apenas uma das opções, diga de quantas formas ele pode escolher?

3 + 2 = 5

Problema 2:

Em relação ao problema anterior, suponha que agora José tenha dinheiro para comprar apenas um livro e uma revista. De quantas formas ele pode escolher?

3 . 2 = 6

Problema 3:

De quantas maneiras pode-se retirar 2 bolas de uma caixa de um total de 5 bolas?

Fonte: Autor.

As aulas tiveram início no dia 07 de novembro de 2019, comecei explicando a tarefa que seria realizada, os alunos foram receptivos e demonstraram entusiasmo. Após, comecei com alguns questionamentos, a saber: Como se poderia realizar a atividade? Seria necessário algum conhecimento prévio para realizá-la? As respostas foram as mais diversas, porém, um senso comum foi que com raciocínio lógico seria possível resolver. A maioria dos alunos lembravam-se do diagrama de árvore e como usá-lo corretamente, outros identificaram a possibilidade de usar fórmulas de contagem para resolver a atividade e, como era uma atividade de sondagem e foi feita em duplas, eles ficaram livres para definir a melhor maneira de realizá-la. Em seguida, distribui o material impresso com as questões.

Algumas situações ocorreram:

Situação 1:

Dupla A: Ah, podemos desenhar (listar)?
Professor: Sim, mas como vocês fariam?
Dupla A: Desenhando as setinhas, professor.
Professor: Ok, não esqueçam de deixar claro o seu raciocínio.

Situação 2:

Dupla B: Podemos fazer só a conta?
Professor: Sim, mas como vocês fariam?
Dupla B: Vamos somando todas as revistas e livros.
Professor: Ok, não esqueçam de justificar seus raciocínios.
Os grupos não tiveram dificuldade em executar a atividade proposta, foram criativos e a maioria fez uso do diagrama de árvores e do método combinatório e conseguiram finalizar durante a aula.

Na aula seguinte, iniciamos a fase 2, reunimos as duplas novamente e cada uma recebeu uma nova folha impressa com um problema com solução e alguns questionamentos para serem respondido. Acredito que foi a fase que mais necessitou da minha intervenção, pois era necessário a compreensão do problema e da sua resolução para alcançar o objetivo almejado para essa fase. Nessa aula transitei por todas as duplas até que conseguissem compreender a resolução do problema e iniciassem a atividade proposta. Pude perceber que os alunos não queriam responder os questionamentos que o problema apresentava, vários lamentos surgiram: “Nossa virou aula de português?”,” Tem que responder isso mesmo?”, “Como eu escrevo, professor?”. Foi preciso motivação e estímulo para a conclusão desta fase, porém, após alguns minutos de conversa, conseguiu-se que eles realizassem a atividade, contudo, muitos deixaram respostas incompletas ou sem respostas. A terceira e última fase, acredito ter sido a mais produtiva, novamente os alunos formaram as duplas iniciais e receberam uma folha impressa com dois problemas para serem resolvidos. Inicialmente a maioria pensou em utilizar o método combinatório, porém uma dupla perguntou se poderia desenhar, foi o como um divisor de águas, todos passaram a levantar maneiras de resolver os problemas.

Algumas situações ocorreram:

Situação 1:

Dupla C: Posso desenhar todos os caminhos juntos?
Professor: Melhor não, pois, como vocês iriam entender se estiverem tudo junto e misturado?

Dupla C: E se desenhar separado os caminhos, professor?
Professor: Acho que ficaria melhor.

Situação 2:

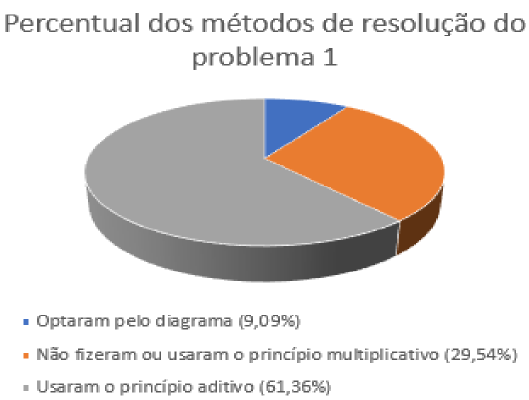
Dupla D: Podemos fazer um diagrama com todos os caminhos?

Professor: Sim, mas como vocês acham que iria entender?
Dupla D:Vamos enumerar cada caminho.

Professor: Ok, não esqueçam que eu preciso entender. E finalmente, após o termino da atividade, alguns grupos foram até a lousa apresentar sua solução e em uma discussão coletiva concluíram que alguns grupos erraram na hora de resolver o problema 2, pois levaram em conta o número de quadradinhos da grada e não de caminhos a percorrer. Observamos também que alguns grupos tentaram de desenhar os caminhos possíveis, mas, não conseguiram, ou faltavam caminhos ou extrapolavam, somente uma dupla enumerou os 20 caminhos possíveis. Subdividiremos a seção de acordo com cada fase da metodologia, ou seja, trabalharemos na seguinte ordem: sondagem, introdução às funções geradoras e praticando. Vale observar que estaremos avaliando se os objetivos foram alcançados por meio dos métodos que os alunos utilizaram para a resolução dos problemas. Os parâmetros para tal avaliação foram: geométrico, algébrico ou combinatório.

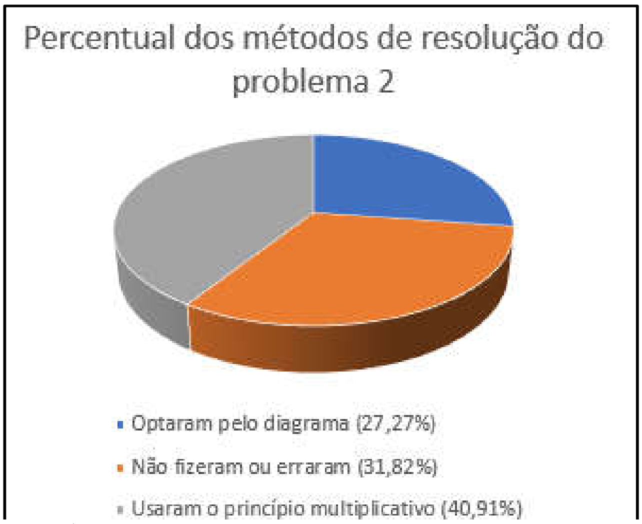
Fase 1 - Sondagem: inicialmente as turmas foram separadas em duplas, totalizando 44 duplas (na primeira fase contamos com 88 alunos), e após, lhes foi entregue uma folha com os três problemas abaixo: *Problema 1:* Suponha que José foi à uma livraria e ficou em dúvida entre três livros distintos e duas revistas distintas.

Figura 11. Gráfico 1



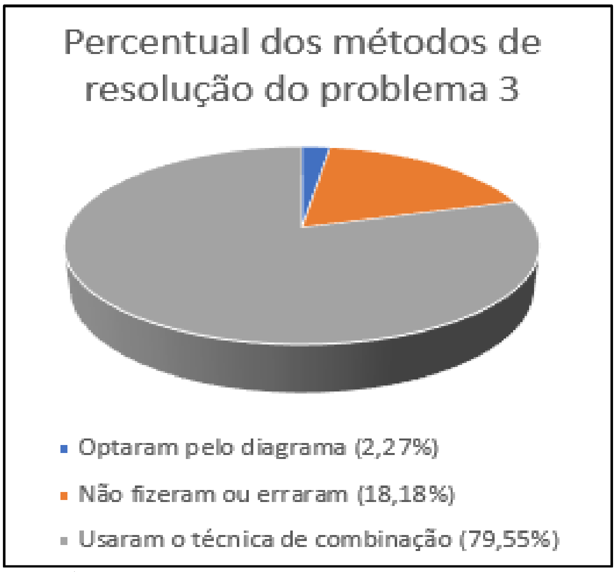
Fonte: Autor.

Figura 12. Gráfico 2



Fonte: Autor.

Figura 13. Gráfico 3

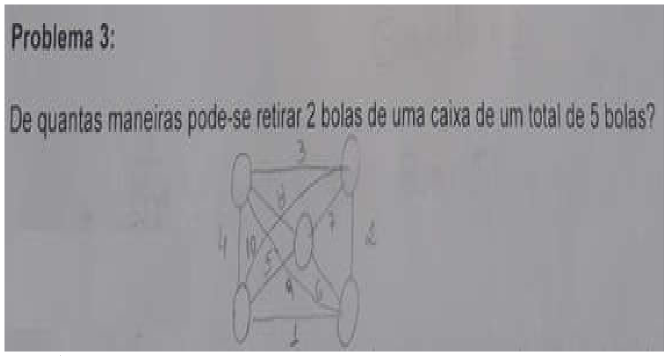


Fonte: Autor.

Sabendo que ele tenha dinheiro para comprar apenas uma das opções, diga de quantas formas ele pode escolher.

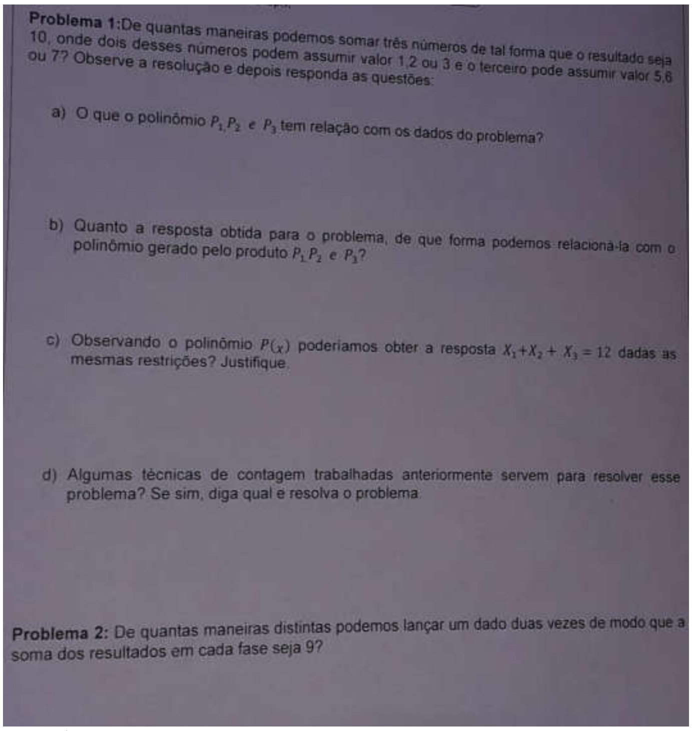
Problema 2: Em relação ao problema anterior, suponha que agora José tenha dinheiro para comprar apenas um livro e uma revista. De quantas formas ele pode escolher?

Figura 14. Solução de dupla 3



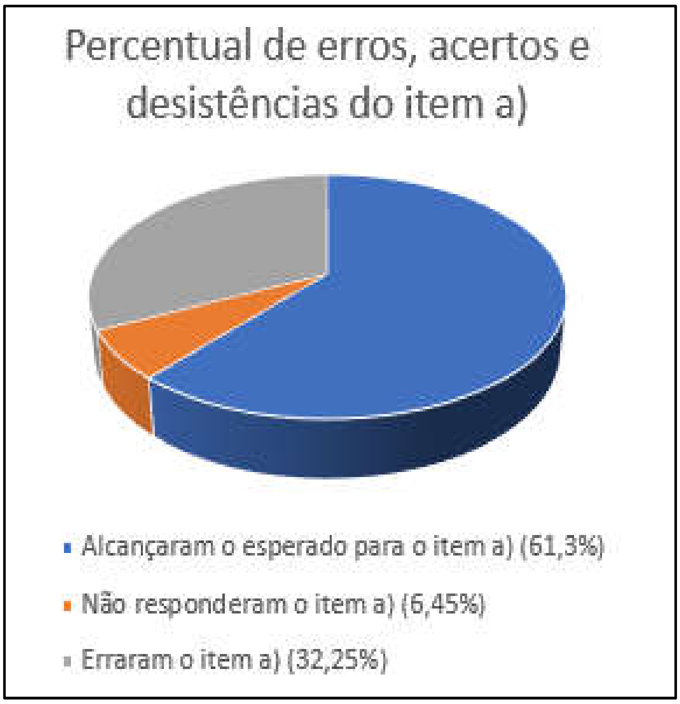
Fonte: Autor.

Figura 15. Problemas da fase 2



Fonte: Autor.

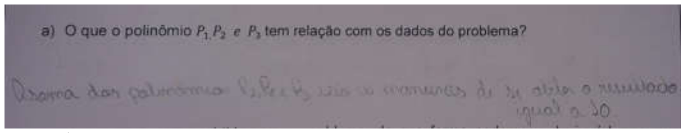
Figura 16. Gráfico 4



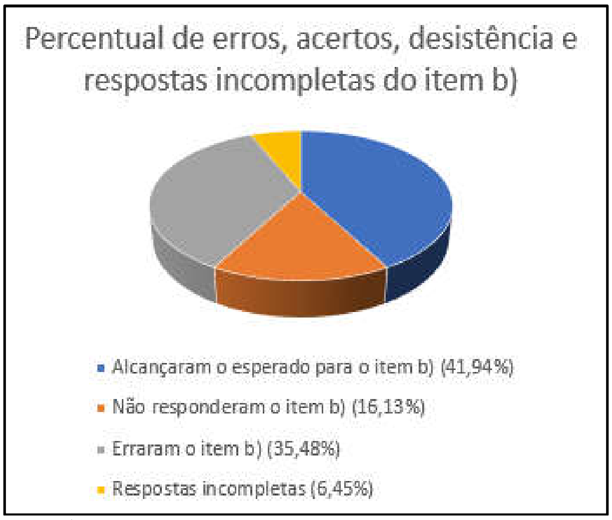
Fonte: Autor.

Problema 3: De quantas maneiras pode-se retirar 2 bolas de uma caixa de um total de 5 bolas?. Após, deu-se um tempo para que os alunos lessem os problemas e posteriormente foi feito uma leitura coletiva. Foi lhes explicado que poderiam resolver os problemas da forma que preferissem, mas que deveriam justificar o método que usou, ou seja, só respostas finais não seriam consideradas. Para os problemas 1 e 2, esperou-se que os alunos os resolvessem pelos princípios multiplicativo ou aditivo, ou também de modo geométrico, pelo diagrama de árvore. Analisando as respostas finais pôde-se perceber que as formas de resolução foram bem equilibradas em todas as turmas e que não tiveram tanta dificuldade para resolver os problemas.

Figura 17. Solução da dupla 4

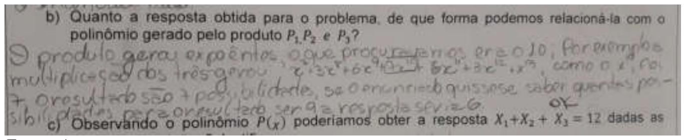


Fonte: Autor.



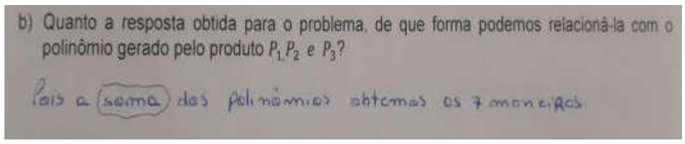
Fonte: Autor

Figura 19. Solução de dupla 5



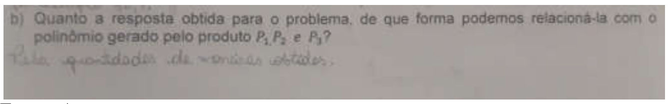
Fonte: Autor.

Figura 20. Solução de dupla 6



Fonte: Autor.

Figura 21. Solução de dupla 7



Fonte: Autor.

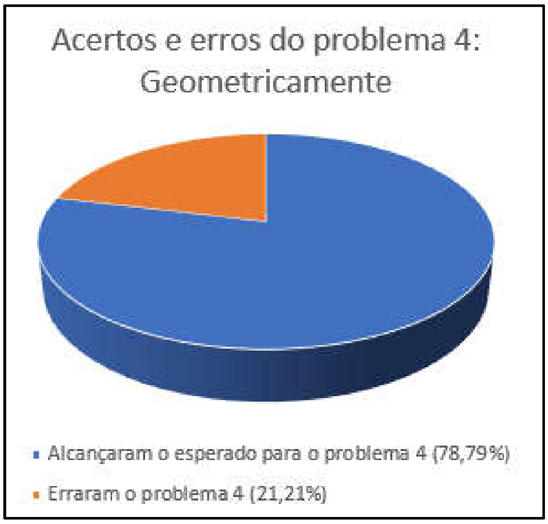
Figura 22. Gráfico 6

Fonte: Autor

Figura 28. Gráfico 7

Fonte: Autor.

Figura 29. Gráfico 8



Fonte: Autor.

Abaixo segue algumas imagens da resolução de duplas diferentes: Podemos notar, por meio das imagens acima, que alguns alunos logo perceberam que os problemas se tratavam do princípio multiplicativo e aditivo, e só o aplicaram, já outros preferiram usar o diagrama de árvore para verificar seus raciocínios. De forma geral, o gráfico abaixo nos mostra o percentual das duplas que optaram pelo método combinatório ou pelo método geométrico para a resolução de cada um dos dois problemas iniciais. O gráfico acima nos indica que a maioria das duplas resolveu o problema 1 por meio do princípio aditivo, o que mostra que nosso objetivo foi alcançado, visto que esse era nosso ideal. Segue abaixo o percentual de métodos utilizados para a resolução do problema 2: Podemos perceber que no problema 2 os métodos de resolução foram bem equilibrados. Porém, a maior porcentagem dá-se no uso do princípio multiplicativo como forma de resolução, logo, alcançamos nosso objetivo. Vale observar que o grupo de alunos que errou os problemas 1 e 2 confundiu-se na hora de aplicar os princípios, e inverteram a ordem dos mesmos, ou seja, no problema 1 usaram o princípio multiplicativo (multiplicaram 3 por 2) e, no problema 2, usaram o princípio aditivo de forma equivocada (somara 3 com 2). Uma forma de evitar esses equívocos consiste em o professor desenvolver com os alunos no quadro o diagrama de árvores de cada problema, pois, os princípios aditivo e multiplicativo aparecem de forma intuitiva por meio deste.

Quanto ao problema 3, tínhamos como meta que os alunos usassem técnicas de contagem, especificamente a combinação de 5 elementos tomados de 2 em 2. O gráfico a seguir mostra se nossos objetivos foram alcançados. O problema 3 foi o que os alunos mais tiveram segurança em responder, houveram pouquíssimos alunos que não resolveram, como podemos ver no gráfico acima. No caso das duplas que erraram, o equívoco deu-se porque eles usaram a técnica de arranjo, mostrando que ainda não compreenderam quando um problema é de arranjo ou combinação. Houve uma única dupla que resolveu geometricamente, por meio do desenho. Segue abaixo a forma como resolveram:

Após analisarmos cada um dos problemas da primeira fase, podemos concluir que essa foi realizada com sucesso, visto que em cada problema as duplas utilizaram as técnicas esperadas. Fase 2 - Introdução às funções geradoras: a fase 2 contou com 31 duplas e consistiu inicialmente na resolução do seguinte problema no quadro: De quantas maneiras podemos somar três números de tal forma que o resultado seja 10, onde dois desses números podem assumir valor 1,2 ou 3 e o terceiro pode assumir valor 5, 6 ou 7? A resolução desse problema pode ser vista na fase 2 da metodologia. Após introduzir a fase com a resolução desse problema, foi passado o seguinte questionário.

Segue o que esperávamos que os alunos respondessem em cada item:

- Com esse item esperamos que os alunos consigam perceber que os polinômios P_1, P_2, P_3foram construídos estrategicamente de modo que as potências de x em cada polinômio representassem as restrições de x_1, x_2, x_3.
- Nessa questão esperamos que os alunos percebam que quando fizemos o produto de P_1, P_2, P_3estávamos relacionando os expoentes, que representam x_1, x_2, x_3,por meio da soma.
- Nessa questão pretendemos que os alunos percebam o potencial da função geradora, pois no problema aqui abordado, o polinômio*P(x)* fornece a resposta para qualquer equação do tipo $x_1 + x_2 + x_3 = m$, como $m \in \{7,8,9,10,11,12,13\}$, dadas as restrições iniciais de x_1, x_2, x_3.Ou seja, as funções geradoras servem como uma poderosa ferramenta para resolver problemas de contagem com restrições, sendo assim, elas são muitas vezes mais eficientes que as próprias técnicas de contagem.
- Com essa alternativa esperamos que os alunos percebam que usar as outras técnicas torna-se algo mais difícil, pois há muitas restrições no problema, assim, o único processo mais familiar a eles seria resolver por enumeração, porém, se aumentasse o número de restrições isso poderia ser muito mais trabalhoso.

Abaixo segue o gráfico representando se os alunos atingiram o que esperávamos para o problema 1 dessa fase. Os alunos que erraram cometeram o equívoco de pensar que no item a) a soma dos polinômios P_1, P_2, P_3 davam a resposta do problema, como mostra a imagem abaixo: O gráfico a seguir mostra o percentual de erros, acertos, desistências e respostas incomplete Segue abaixo alguns exemplos de respostas que consideramos corretas, erradas e incompletas, respectivamente:

A dupla percebeu que o produto dos polinômios gerava a soma dos expoentes, e que o coeficiente de x^{10} nos fornecia a resposta do problema. A dupla cometeu o equívoco de deduzir que a soma dos polinômios forneceria a resposta do problema combinatório. Essa dupla não justificou bem sua resposta: "Pelas quantidades de maneiras obtidas". De quê?

De forma geral, essa questão atingiu nossos objetivos, visto que a maioria das duplas percebeu que o coeficiente do termo x^{10}, obtido pelo produto dos polinômios gera a resposta do nosso problema. A seguir, temos o gráfico do item c), que fornece os acertos, erros e desistências deste. Seguem abaixo alguns exemplos de respostas que consideramos corretas e erradas, respectivamente: Essa dupla percebeu que o polinômio gerado pelo produto de P_1, P_2, P_3 fornece todas as soluções da equação do tipo $x_1 + x_2 + x_3 = m$, com $m \in \{7,8,9,10,11,12,13\}$, dadas as restrições de x_1, x_2, x_3. Como podemos ver pela imagem acima, a dupla não percebeu a potencialidade da função geradora, pois, pensaram que com as restrições de x_1, x_2, $x_3$só se poderia obter o resultado 10. Assim, podemos ver que esse item foi totalmente compreendido, visto que a grande parte das duplas respondeu corretamente.

Quanto ao item d), a maioria das duplas deu como alternativa resolver o problema por diagrama de árvores, e está correto. Outros alunos deram a opção de resolver por meio de arranjos e probabilidade, mas não justificaram suas ideias. Segue abaixo a resposta que melhor responde esse item. Vemos que essa dupla compreendeu as funções geradoras, visto que percebeu que outras técnicas de resoluções desenvolvidas no ensino médio dariam mais trabalho, pois o problema tem muitas restrições. Por fim, podemos concluir que essa primeira abordagem para as funções geradoras foi bem satisfatória, uma vez que em cada item tivemos bons resultados.

Problema 2

Inicialmente fizemos uma correção no enunciado do problema dois, no lugar de fase, trocamos por face. Essa é a importância de fazer uma leitura coletiva, corrigir possíveis erros na escrita do problema. Para o problema 2 tínhamos a intenção que fosse resolvido por meio das funções geradoras. Então nossa avaliação se dará por meio desse critério. Mas, para isso, vejamos como resolvê-lo: Solução: Primeiro, vamos modelar nosso problema. Sabemos que um dado tem 6 faces, numeradas de 1 a 6. Sendo assim, o polinômio que controla a ocorrência de cada face é $P(x) = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6$.

Como lançamos o dado duas vezes, nossa resposta será dada pelo coeficiente de x^9 no desenvolvimento de $[P(x)]^2$. Assim,

$$[P(x)]^2 = x^{12} + 2x^{11} + 3x^{10} + 4x^9 + 5x^8 + 6x^7 + 5x^6 + 4x^5 + 3x^4 + 2x^3 + x^2.$$

Logo, observando o coeficiente de x^9, obtemos como resposta do nosso problema que existem 4 possibilidades de lançar o dado duas vezes e obter como soma de cada face o número 9. O problema 2 teve 100% de acertos. Todas as duplas conseguiram resolvê-lo e chegaram ao resultado 4. Segue abaixo uma imagem da resolução de uma das duplas:

O interessante na resolução acima, é que a dupla além de resolver pela função geradora, também enumerou as possibilidades, mostrando que o problema assume mais de uma solução. As formas de resolução dos problemas acima encontram-se na fase 3 da seção 5. Para essa fase, tínhamos como parâmetro que os alunos resolvessem o problema por meio de um dos métodos a seguir: contagem, geometricamente ou algebricamente. Sendo assim, avaliaremos as respostas por meio destes critérios.Vale observar que essa fase contou com 88 alunos, sendo então, 44 duplas.

Problema 4: As principais formas de resolução desse problema foram por meio da contagem e algebricamente. Onde 33 duplas resolveram geometricamente, enumerando as possibilidades e, as 11 restantes, responderam combinatoriamente. Assim, seguem abaixo os gráficos com os erros e acertos, respectivamente, de cada um desses parâmetros:

Podemos ver, por meio dos gráficos acima, que as formas de resolução do problema 2 foram bem satisfatórias, e mais, atingiram dois dos critérios estabelecidos para a avaliação. Porém, devemos observar que, nenhuma dupla resolveu o problema por meio das funções geradoras, talvez não tenham percebido que fosse possível usar essa ferramenta.

Consideraçõesfinais

Ao longo do trabalho buscamos mostrar formas alternativas de abordar a análise combinatória e trouxemos uma forma diferente de apresentar as formas de contagem, onde por meio de situações-problema iniciais e de forma intuitiva, desenvolvemos as principais técnicas abordadas no ensino médio.Além disso, produzimos uma sequência de fases que o professor pode seguir e adaptar às suas turmas para desenvolver uma maneira diferente de se contar, que no caso, é por meio das funções geradoras. Também uma análise dos dados que obtemos da aplicação dos problemas em turmas de terceiro ano. Esperamos que por meio dessa o professor possa perceber novas estratégias para aplicá-las de forma a contemplar suas turmas. Contudo, num aspecto geral, ficamos satisfeitos com os resultados obtidos da aplicação dos problemas no ensino médio, pois, pudemos perceber que os alunos optaram, a grande maioria, em resolvê-los de forma intuitiva, não recorrendo tanto a fórmulas já decoradas.

REFERÊNCIAS

ALLEVATO, Norma Suely Gomes.; ONUCHIC, Lourdes de la Rosa. Ensinando Matemática na Sala de Aula através da Resolução de Problemas. Rio de Janeiro: Boletim GEPEM, 2009.

BORBA, Rute Elizabete de Souza. Estudos em Raciocínio Combinatório: investigações e práticas de ensino da Educação Básica. Rio Claro: Bolema, 2015, v. 29, n. 53, p. 1348 – 1368.

BRASIL. Base Nacional Comum Curricular: Ensino Médio. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2018.

BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemática. Brasília: Secretaria do Ensino Médio, 1997.

BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemática. Brasília: Secretaria do Ensino Médio, 1999.

JULIANELLI, José Roberto; DASSIE, Bruno Alves; LIMA, Mário Luiz Alves de; SÁ, Ilydio Pereira de. Curso de Análise Combinatória e Probabilidade. 1. ed. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2009.

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. 2. ed. – Rio Claro: Bolema, 2011.

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes; NOGUTI, Fabiane Cristina Hopner; JUSTULIN, Andresa Maria. (Orgs.). Resolução de Problemas: Teoria e Prática. Paco Editorial: Jundiaí. 2014.

SANTOS, José Plínio de Oliveira. Introdução à Análise Combinatória. 4ª Ed. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2007.

SILVA, Diogo Pinheiro da; GUERRA, EdielAzevêdo. A aprendizagem de Análise Combinatória no Ensino Médio: uma proposta didática por meio da Resolução de Problemas. Rio Grande do Sul: REMAT, 2017.

****